



СИБИРСКИЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

SIBERIAN
FEDERAL
UNIVERSITY

Электронный учебно-методический комплекс

Тепломассообмен

Учебная программа дисциплины

- **Курс лекций**

Учебное пособие к практическим занятиям

Методические указания по лабораторным работам

Методические указания по самостоятельной работе

Банк тестовых заданий в системе UniTest



Красноярск
ИПК СФУ
2009

УДК 621.3.036(075)
ББК 31.12я73
Т34

Авторы:

**М. С. Лобасова, К. А. Финников, Т. А. Миловидова, А. А. Дектерев,
Д. С. Серебренников, А. В. Минаков, И. А. Кузоватов, В. В. Васильев**

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Тепломассообмен» подготовлен в рамках реализации Программы развития федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет» (СФУ) на 2007–2010 гг.

Рецензенты:

Красноярский краевой фонд науки;
Экспертная комиссия СФУ по подготовке учебно-методических комплексов дисциплин

Т34 Тепломассообмен [Электронный ресурс] : курс лекций / М. С. Лобасова, К. А. Финников, Т. А. Миловидова и др. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – (Тепломассообмен : УМКД № 1536–2008 / рук. творч. коллектива М. С. Лобасова). – 1 электрон. опт. диск (DVD). – Систем. требования : *Intel Pentium* (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц ; 512 Мб оперативной памяти ; 50 Мб свободного дискового пространства ; привод *DVD* ; операционная система *Microsoft Windows XP SP 2 / Vista* (32 бит) ; *Adobe Reader 7.0* (или аналогичный продукт для чтения файлов формата *pdf*).

ISBN 978-5-7638-1689-1 (комплекса)

ISBN 978-5-7638-1756-0 (курса лекций)

Номер гос. регистрации в ФГУП НТЦ «Информрегистр» 0320902508 (комплекса)

Настоящее издание является частью электронного учебно-методического комплекса по дисциплине «Тепломассообмен», включающего учебную программу дисциплины, учебное пособие к практическим занятиям, методические указания по лабораторным работам, методические указания к самостоятельной работе, контрольно-измерительные материалы «Тепломассообмен. Банк тестовых заданий», наглядное пособие «Тепломассообмен. Презентационные материалы».

Рассмотрена стационарная и нестационарная теплопроводность, изложены вопросы конвективного теплообмена при вынужденном и свободном движении жидкости, теплообмена при фазовых превращениях, лучистого теплообмена, а также основы массопереноса.

Предназначен для студентов направления подготовки бакалавров 221000.62 «Техническая физика» укрупненной группы 220000 «Автоматизация и управление».

© Сибирский федеральный университет, 2009

Рекомендовано к изданию Инновационно-методическим управлением СФУ

Редактор Л. Ф. Калашник

Разработка и оформление электронного образовательного ресурса: Центр технологий электронного обучения Информационно-телекоммуникационного комплекса СФУ; лаборатория по разработке мультимедийных электронных образовательных ресурсов при КрЦНИТ

Содержимое ресурса охраняется законом об авторском праве. Несанкционированное копирование и использование данного продукта запрещается. Встречающиеся названия программного обеспечения, изделий, устройств или систем могут являться зарегистрированными товарными знаками тех или иных фирм.

Подп. к использованию 30.11.2009

Объем 4 Мб

Красноярск: СФУ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
МОДУЛЬ 1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ	10
Лекция 1. Стационарная теплопроводность. Основные положения теплопроводности.....	10
Лекция 2. Теплопроводность плоской стенки без внутренних источников тепла.....	19
Лекция 3. Теплопроводность плоской стенки при наличии внутренних источников тепла.....	28
Лекция 4. Теплопроводность цилиндрической стенки без внутренних источников тепла.....	35
Лекция 5. Теплопроводность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников тепла	46
Лекция 6. Интенсификация теплопередачи	53
Лекция 7. Нестационарная теплопроводность. Аналитическое описание задач теплопроводности. Бесконечная тонкая пластина .	63
Лекция 8. Бесконечный цилиндр, шар. Определение количества теплоты тела конечных размеров	74
Лекция 9. Регулярный режим охлаждения тел	85
МОДУЛЬ 2. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ.....	94
Лекция 10. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена	94
Лекция 11. подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена	103
Лекция 12. Теплообмен при свободной конвекции в большом объеме около вертикальных поверхностей	113
Лекция 13. Свободная конвекция около горизонтальных поверхностей. Свободная конвекция в ограниченном пространстве	119
Лекция 14. Теплоотдача при вынужденном продольном омывании плоской поверхности.....	125
Лекция 15. Теплоотдача при вынужденном поперечном омывании труб и пучков труб.....	133

Лекция 16. Описание процесса вынужденного течения жидкости в трубах	143
Лекция 17. Определение коэффициентов теплоотдачи при вынужденном течении жидкости в трубах.....	155
Лекция 18. Отдельные задачи конвективного теплообмена в однофазной среде.....	162
МОДУЛЬ 3. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ.....	168
Лекция 19. Описание процесса конденсации пара	168
Лекция 20. Теплоотдача при конденсации неподвижного пара.....	173
Лекция 21. Теплоотдача при конденсации движущегося пара.....	179
Лекция 22. Описание процесса кипения жидкости	185
Лекция 23. Определение коэффициентов теплоотдачи при кипении однокомпонентных жидкостей	193
Лекция 24. Кризисы кипения	197
МОДУЛЬ 4. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ	201
Лекция 25. Основные положения теплообмена излучением	201
Лекция 26. Законы теплового излучения	207
Лекция 27. Теплообмен излучением между твердыми телами, разделенными прозрачной (диатермичной) средой. Тела с плоскопараллельными поверхностями	212
Лекция 28. Тело с оболочкой и произвольно расположенные тела	221
Лекция 29. Излучение газов и паров	232
Лекция 30. Лучистый теплообмен между газом и оболочкой. Примеры практических задач	238
МОДУЛЬ 5. МАССООТДАЧА	246
Лекция 31. Тепло- и массообмен в двухкомпонентных средах. Основные положения тепло- и массообмена	246
Лекция 32. Тепло- и массоотдача в двухкомпонентных средах.....	253
Лекция 33. Тройная аналогия	259
Аналогия переноса импульса, энергии и массы компонента (тройная аналогия)	259
Лекция 34. Тепло- и массоотдача при испарении жидкости в парогазовую среду. Испарение воды в воздух.....	264
Лекция 35. Стационарное испарение капли.....	272
Лекция 36. Тепло- и массообмен при химических превращениях...	278
ПРИЛОЖЕНИЕ	289
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	292

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с быстрым развитием науки и техники все большее значение приобретают процессы тепло- и массообмена. Эффективность и надежность работы перспективных тепловых двигателей (ракетных, атомных, плазменных, МГД-генераторов и т. д.) существенным, а иногда и решающим образом зависит от того, насколько правильно организована система охлаждения проточной части двигателя, что в конечном счете определяется надежностью инженерных методов расчета теплообмена. Решение многих задач космической техники (проблема тепловой защиты, система жизнеобеспечения), авиационной техники (проблема теплового барьера при гиперзвуковых скоростях полета), большой энергетики (создание тепловых электростанций) неразрывно связано с успехами теории тепломассообмена.

Тепломассообмен является специальной дисциплиной подготовки бакалавров по направлению «Техническая физика», а также представляет собой один из важных разделов технической физики. Объем и уровень курса должны быть достаточны для усвоения ряда специальных дисциплин, решения основных практических задач, возникающих при выполнении и защите курсовых и дипломных работ. Курс базируется на изучении таких дисциплин, как физика, математика, вычислительная математика, информатика, термодинамика, механика жидкости и газа, и является базой для изучения профильных дисциплин подготовки магистров по направлению «Техническая физика», изучающих магистерскую программу «Теплофизика и молекулярная физика».

В результате изучения курса «Тепломассообмен» студенты должны овладеть не только теорией, но и методами расчета основных процессов переноса тепла и массы. Для инженерных расчетов традиционных задач имеется значительное количество расчетных формул, методика применения которых будет изучена в предлагаемом курсе. В то же время новая техника непрерывно выдвигает перед учением о тепломассообмене новые и разнообразные задачи, требуя от специалиста умения самостоятельно и творчески использовать его основные законы и методы, поэтому значительное внимание уделено раскрытию физических особенностей рассматриваемых процессов.

ВВЕДЕНИЕ

При наличии в некоторой среде неоднородного поля температур в ней неизбежно происходит процесс переноса тепла. В соответствии со вторым началом термодинамики этот перенос осуществляется в направлении уменьшения температуры (из области с большей температурой в область с меньшей). Точно так же при наличии в среде неоднородного поля концентраций некоторого i -го компонента смеси происходит процесс переноса массы этой примеси. Этот перенос также происходит в направлении уменьшения концентрации примеси. Процессы переноса тепла и массы (тепло- и массообмен) могут осуществляться за счет различных механизмов. За счет хаотического теплового движения или тепловых колебаний микрочастиц (молекул, атомов, ионов) осуществляется молекулярный (микроскопический) перенос тепла (теплопроводность) или массы (молекулярная диффузия). В движущейся жидкости или газе за счет перемещения объемов среды из области с одной температурой или концентрацией в область с другой происходит конвективный (макроскопический) перенос тепла или массы, который всегда сопровождается процессом молекулярного переноса.

При турбулентном движении жидкости или газа процессы конвективного переноса тепла и массы приобретают настолько специфический характер, что их можно выделить в самостоятельный вид переноса. Этот перенос, обусловленный пульсационным характером турбулентного движения, осуществляется за счет поперечного перемещения турбулентных молей и называется турбулентной или молярной теплопроводностью (диффузией).

Существует еще один механизм переноса теплоты, не имеющий соответствующего аналога в процессах массообмена, – излучение, которое осуществляется в результате испускания, распространения и поглощения электромагнитных волн в определенном диапазоне частот.

Процессы тепло- и массообмена, протекающие в двухфазной системе на границе раздела фаз, например, тепло- и массообмен между жидкостью (газом) и твердой поверхностью, называются, соответственно, теплоотдачей и массоотдачей.

В практике встречаются случаи, когда процессы тепло- и массообмена происходят параллельно, одновременно, например испарение вещества с поверхности при одновременной теплоотдаче к этой поверхности или от нее. В этих случаях отмечается взаимное влияние процессов тепло- и массообмена. Например, при наличии в бинарной (двухкомпонентной) смеси градиентов температуры происходит разделение компонентов по молекулярной массе (термодиффузия или эффект Соре). В то же время при наличии массообмена вследствие различия теплоемкостей компонентов смеси возникает диффузионный поток тепла (эффект Дюфо). Кроме того, наличие массообмена на поверхности изменяет граничные условия процесса теплоотдачи. Однако во

многих случаях, встречающихся в практике, роль взаимного влияния процессов тепло- и массообмена невелика и им можно пренебречь. Если процессы тепло- и массопереноса протекают независимо один от другого, то описание этих процессов оказывается аналогичным. В дальнейшем мы будем рассматривать их отдельно.

Из курса общей физики известно существование трех видов молекулярного переноса: перенос импульса (трение в ламинарном потоке), перенос тепла (теплопроводность) и перенос массы примеси (концентрационная диффузия). Аналогия между этими процессами заключается в единообразии математической формулировки соответствующих законов: Ньютона для вязкого трения, Фурье для теплопроводности и Фика для концентрационной диффузии.

Закономерности всех трех процессов переноса могут быть обобщены и сформулированы следующим образом: поток субстанции пропорционален движущей силе, а коэффициент пропорциональности является коэффициентом переноса. Движущей силой в каждом случае является градиент объемной плотности соответствующей субстанции. В этой формулировке отражено существо известного в термодинамике необратимых процессов принципа линейности Онзагера, являющегося одним из общих принципов процессов переноса.

Аналогия процессов молекулярного переноса импульса, тепла и массы при определенных условиях приводит к тождественности соответствующих дифференциальных уравнений и позволяет создать общую теорию процессов переноса.

Необходимо отметить, что процессы переноса тепла и массы аналогичны только при отсутствии вторичных эффектов, обусловленных их взаимным влиянием, т. е. термодиффузии и диффузионного переноса теплоты. Практически это означает, что для получения указанной аналогии роль вторичных эффектов тепло- и массообмена должна быть невелика.

Таким образом, если математическая формулировка процессов переноса массы и тепла будет одинаковой, то решение задачи, полученное для одного из процессов (например, теплоотдача при ламинарном обтекании плоской поверхности), может быть использовано для исследования аналогичного процесса (массоотдачи при ламинарном обтекании плоской поверхности). В связи с этим в первую очередь нами будут рассмотрены процессы переноса тепла.

Теплопередача является частью общего учения о теплоте, основы которого были заложены еще М. В. Ломоносовым в середине XVIII в., создавшим механическую теорию теплоты и основы сохранения и превращения материи и энергии. С развитием техники и ростом мощности устройств и машин роль процессов переноса тепла в различных теплообменных аппаратах значительно возросла. Окончательное учение о теплоте – теория тепломассообмена сформировалось в самостоятельную научную дисциплину лишь в начале XX в. Значительный вклад в ее формирование внесли русские ученые М. В. Кирпичев, А. А. Гухман и советские Г. М. Кондратьев, М. А. Михеев, С. С. Кутателадзе. Большое развитие в нашей стране получила теория подо-

бия, являющаяся по существу теорией эксперимента. Теория теплообмена – это наука о процессах переноса теплоты в пространстве с неоднородным распределением температуры. Наблюдения за процессами распространения теплоты показали, что теплообмен – сложное явление, которое можно расчленить на ряд простых, принципиально отличных друг от друга процессов: теплопроводность; конвекция; излучение.

Теплопроводность – процесс переноса теплоты (внутренней энергии), происходящий при непосредственном соприкосновении тел (или частей тела) с различной температурой. Обмен энергией осуществляется микрочастицами, из которых состоят вещества: молекулами, атомами, свободными электронами. За счет взаимодействия друг с другом быстро движущиеся микрочастицы отдают свою энергию более медленным, перенося таким образом теплоту из зоны с более высокой в зону с более низкой температурой. Явление теплопроводности наблюдается во всех телах: жидких, твердых и газообразных.

Конвекция – процесс переноса теплоты, происходящий за счет перемещения больших масс (макромасс) вещества в пространстве, поэтому наблюдается только в жидких и газообразных телах. Объемы жидкости или газа, перемещаясь из области с большей температурой в область с меньшей температурой, переносят с собой теплоту.

Конвективный перенос может осуществляться в результате свободного или вынужденного движения теплоносителя. Свободное движение или естественная конвекция вызывается действием массовых (объемных) сил: гравитационной, центробежной, за счет протекания в объеме жидкости электрического тока. В приближении сплошной среды под жидкостью мы понимаем любую текучую среду (то, что отлично от твердого тела). Чаще всего в технических устройствах естественная конвекция вызывается подъемной силой, обусловленной разностью плотностей холодных и нагретых частей жидкости. Возникновение и интенсивность свободного движения определяется тепловыми условиями процесса и зависит от рода жидкости, разности температур и объема пространства, в котором происходит конвекция. Вынужденная конвекция вызывается работой внешних агрегатов (насос, вентилятор). Движущая сила при этом непосредственно связана с разностью давлений на входе и выходе из канала, по которому перемещается жидкость.

Радиационный теплообмен (теплообмен излучением) представляет собой перенос теплоты посредством электромагнитного поля. При этом внутренняя энергия одного тела превращается в энергию излучения фотонов, которая распространяется в пространстве и, попадая на другие тела, способные ее поглощать, снова превращается во внутреннюю энергию.

Наблюдаемые в природе и технике явления теплообмена включают в себя, как правило, все элементарные способы переноса теплоты. Иногда интенсивность некоторых способов переноса тепла невелика по сравнению с другими, ею можно пренебречь, и тогда можно говорить об элементарном процессе теплообмена в чистом виде. Сочетание любых комбинаций элементарных процессов переноса тепла называют сложным теплообменом. Рас-

смотрим некоторые сложные явления теплообмена, часто встречающиеся на практике.

Теплоотдача или конвективный теплообмен – процесс обмена энергией между движущейся средой и поверхностью твердого тела является сочетанием передачи тепла теплопроводностью в твердой стенке и конвекцией в жидкой среде.

В реальных условиях конвекция теплоты всегда сопровождается молекулярным переносом теплоты, а иногда и лучистым теплообменом. Экспериментальное исследование процесса теплоотдачи позволило установить пропорциональность этого процесса разности температур между стенкой и жидкостью. Коэффициент пропорциональности получил название коэффициента теплоотдачи, который не является теплофизическим свойством вещества, как теплоемкость или плотность, значения которых представлены в справочных таблицах функцией температуры. Факторами, влияющими на коэффициент теплоотдачи, кроме температуры среды, являются, наличие вынужденной или свободной конвекции, их взаимное влияние; внешнее обтекание тела или движение жидкости в канале (трубе); наличие фазового перехода (кипение, конденсация); род жидкости, свойства стенки.

В курсе лекций будут рассмотрены следующие процессы конвективного теплообмена:

- свободная конвекция в неограниченном пространстве у вертикальной стенки и горизонтальной трубы, а также в ограниченном пространстве вертикальных и горизонтальных щелей;

- вынужденная конвекция при внешнем обтекании пластины, поперечном обтекании трубы и пучков труб;

- вынужденное течение жидкости в трубах и каналах, при котором свободная конвекция может как усиливать, так и уменьшать теплоотдачу;

- теплоотдача при фазовых переходах как неподвижной, так и движущейся среды.

Теплопередача – процесс передачи тепла между двумя жидкими средами через разделяющую их твердую стенку. Как и в случае теплоотдачи, процесс теплопередачи пропорционален разности температур между двумя жидкими средами, его интенсивность характеризуется коэффициентом теплопередачи, который тоже не является теплофизическим свойством. Для передачи тепла от одной жидкой среды к другой применяют устройства – поверхностные теплообменные аппараты, одним из этапов проектирования которых является определение коэффициентов теплопередачи.

Радиационно-конвективный теплообмен – процесс передачи тепла от стенки к окружающей среде, который включает в себя все три элементарных процесса передачи тепла. Например, дымовые газы передают тепло поверхностям труб одновременно путем соприкосновения и излучения.

МОДУЛЬ 1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Лекция 1. Стационарная теплопроводность. Основные положения теплопроводности

Методы исследования тепловых процессов. Основные понятия, используемые при описании процессов переноса тепла. Температурное поле. Температурный градиент. Тепловой поток. Плотность теплового потока. Закон Фурье, коэффициент теплопроводности. Математическая формулировка задач теплопроводности. Дифференциальное уравнение теплопроводности. Краевые условия задач теплопроводности, различные способы задания граничных условий. Закон Ньютона – Рихмана.

Методы исследования тепловых процессов

На основании представлений современной физики явления природы вообще и теплопроводности, в частности, возможно описать и исследовать на основе феноменологического и статистического методов [5, 10].

Метод описания процесса, игнорирующий микроскопическую структуру вещества, рассматривающий его как сплошную среду (континуум), называется феноменологическим. Он дает возможность установить некоторые общие соотношения между параметрами, характеризующими рассматриваемое явление в целом. Феноменологические законы носят общий характер, роль конкретной физической среды учитывается коэффициентами, определяемыми непосредственно из опыта. Достоинством феноменологического метода является то, что он позволяет сразу установить общие связи между параметрами, характеризующими процесс, и использовать экспериментальные данные, точность которых предопределяет и точность самого метода. В то же время сам факт проведения опытов для выявления характеристик физической среды является и недостатком метода, так как этим ограничиваются пределы применения феноменологических законов. Кроме того, современный эксперимент очень сложен и зачастую является дорогостоящим.

Другой путь изучения физических явлений основан на исследовании внутренней структуры вещества. Среда рассматривается как некоторая физическая система, состоящая из большого числа молекул, ионов и электронов с заданными свойствами и законами взаимодействия. Получение макроскопических характеристик по заданным микроскопическим свойствам среды

составляет основную задачу такого метода, называемого статистическим. Достоинством статистического метода является то, что он позволяет получить феноменологические соотношения на основании заданных свойств микроскопической структуры без дополнительного проведения эксперимента. Недостатком статистического метода является его сложность, в силу чего получить конечные расчетные соотношения возможно лишь для простейших моделей вещества. Кроме того, для реализации метода требуется задание ряда параметров, определение которых является предметом исследования специальных разделов физики.

В основу исследования процессов теплопроводности положен феноменологический метод. Аналитическая теория теплопроводности игнорирует молекулярное строение вещества и рассматривает его как сплошную среду. Такой подход правомерен, если размеры объектов исследования достаточно велики по сравнению с размерами молекул и расстояниями между ними. В жидкостях и газах чистая теплопроводность может быть реализована при выполнении условий, исключающих перенос тепла конвекцией. Процесс передачи тепла в пространстве и во времени неразрывно связан с распределением температуры, так как любой вид теплообмена может иметь место только при условии, что в различных точках тела (или системы тел) температура неодинаковая.

Основные понятия, используемые при описании процессов переноса тепла. Температурное поле. Температурный градиент. Тепловой поток. Плотность теплового потока

Температурное поле – совокупность значений температуры во всех точках изучаемого пространства в данный момент времени. Математически оно записывается в виде $t = f(x, y, z, \tau)$. Нахождение температурного поля является главной задачей аналитической теории теплопроводности.

Различают стационарное температурное поле, когда температура во всех точках пространства не зависит от времени, и нестационарное, соответствующее неустановившемуся процессу. В зависимости от количества координат, вдоль которых может изменяться температура тела, различают одномерное, двухмерное и трехмерное поля температур.

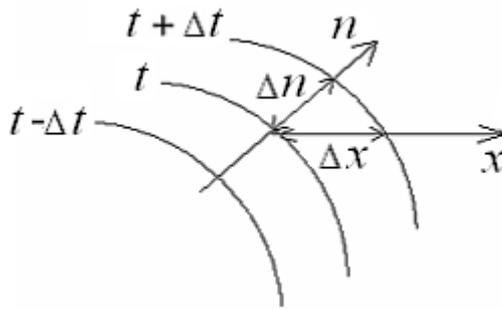


Рис. 1.1

Изотермическая поверхность – геометрическое место точек, температура которых одинакова. Так как одна и та же точка пространства не может одновременно иметь разные значения температуры, то изотермические поверхности не могут пересекаться. Они либо оканчиваются на поверхности тела, либо целиком лежат внутри тела (не могут обрываться внутри тела). Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает семейство изотерм, которые обладают свойствами изотермических поверхностей.

На [рис. 1.1](#) изображено семейство изотерм, отличающихся на Δt . Температура в теле может изменяться только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности.

Градиент температуры $\text{grad } t$ – вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равный производной от температуры по этому направлению. Необходимым условием распространения тепла является неравномерность распределения температуры в рассматриваемой среде, поэтому для передачи тепла теплопроводностью необходимо неравенство нулю температурного градиента в различных точках тела.

Тепловой поток Q – количество теплоты, передаваемое в единицу времени через произвольную поверхность.

Плотность теплового потока (удельный тепловой поток) q – тепловой поток, отнесенный к единице поверхности. Это вектор, совпадающий с направлением распространения тепла, т.е. направлен в сторону убывания температуры и ортогонален изотермам.

Закон Фурье, коэффициент теплопроводности

Исследуя процесс теплопроводности в твердых телах, Фурье экспериментально установил (1822 г.), что количество переданного тепла пропорционально времени, площади сечения, перпендикулярного направлению распространения тепла, и градиенту температуры:

$$dQ_{\tau} = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial n} \cdot dF \cdot d\tau, \quad (1.1)$$

где λ – множитель пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности, который является физическим параметром, характеризует способность данного вещества проводить тепло и численно равен количеству теплоты, переданному в единицу времени через единицу поверхности при градиенте температуры, равном единице.

Разделив правую и левую части уравнения (1.1) на время и площадь поверхности, получим наиболее распространенную формулировку закона Фурье: плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры.

Коэффициент теплопроводности, характеризующий способность данного вещества проводить тепло, в общем случае зависит от структуры, плотности, влажности, давления и температуры. В технических расчетах значения коэффициента теплопроводности берутся из справочных таблиц, в которых, как правило, учитывается зависимость коэффициента теплопроводности от температуры [23, 24]. Большинство этих табличных данных получено в результате измерения теплового потока и градиента температуры в заданном веществе из определения коэффициента теплопроводности:

$$\lambda \equiv \frac{|\vec{q}|}{|\text{grad } t|}.$$

Перенос тепла теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии теплового движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. С изменением давления коэффициент теплопроводности меняется незначительно, а с ростом температуры он увеличивается. Исключением является водяной пар, теплопроводность которого падает с ростом температуры, для которого к тому же проявляется значительная зависимость от давления. Для смесей газов правило аддитивности не действует, коэффициент теплопроводности определяется опытным путем. Для газов значение коэффициента теплопроводности лежит в диапазоне 0,005–0,5 Вт/(м·К). Самые высокие значения коэффициента теплопроводности имеют водород и гелий.

Механизм распространения тепла в капельных жидкостях можно представить как перенос энергии путем нестройных упругих колебаний. С повышением температуры убывает плотность жидкости и коэффициент теплопроводности (за исключением воды и глицерина), с повышением давления – увеличивается. Для жидкостей коэффициент теплопроводности не превышает 1 Вт/(м·К) и лежит примерно в диапазоне 0,07–0,7 Вт/(м·К).

В металлах переносчиками тепла являются электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. Вследствие движения электронов происходит выравнивание температуры во всех точках нагревающегося или охлаждающегося металла. Свободные электроны движутся во всех направлениях – как из более нагретых областей в холодные, так и в обратном направлении. В первом случае они отдают энергию атомам, а во втором – отбирают. Так как в металлах носителями тепловой и электрической энергии являются электроны, то коэффициент теплопроводности и электропроводность пропорциональны друг другу. При повышении температуры вследствие усиления тепловых неоднородностей рассеивание электронов усиливается. Это влечет за собой уменьшение коэффициентов теплопроводности и электропроводности чистых металлов. Примеси значительно снижают коэффициент теплопроводности, так как структурные неоднородности сильно рассеивают электроны. Например, у чистой меди $\lambda \approx 395 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, а у меди с примесями мышьяка $\lambda = 142 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. Для сплавов, в отличие от чистых металлов, коэффициент теплопроводности увеличивается с ростом температуры. В целом коэффициент теплопроводности убывает с уменьшением плотности. Наибольшим коэффициентом теплопроводности обладают чистые серебро и медь (около $400 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$), затем идут золото ($300 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$) и алюминий ($210 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$). В среднем коэффициент теплопроводности металлов лежит в диапазоне $20\text{--}400 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

В неметаллических твердых телах коэффициент теплопроводности растет с увеличением температуры, а также с ростом плотности вещества. Здесь на величину коэффициента теплопроводности оказывают влияние структура, пористость и влажность материала. Многие строительные материалы являются пористыми, а применение закона Фурье к пористым материалам условно. Его следует понимать следующим образом: такой коэффициент теплопроводности имело бы сплошное тело таких же формы и размеров, а также температурах на границе при прохождении через него такого же количества тепла. Для порошкообразных и пористых тел коэффициент теплопроводности сильно зависит от их объемной плотности – растет с ее увеличением, так как теплопроводность заполняющего поры воздуха существенно меньше теплопроводности твердых компонентов пористого материала. С ростом влажности коэффициент теплопроводности пористых материалов увеличивается в первую очередь за счет конвективного переноса тепла из-за капиллярного движения воды. Для неметаллических твердых материалов коэффициент теплопроводности обычно ниже $10 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, для строительных и теплоизоляционных материалов составляет $0,02\text{--}3,0 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

Математическая формулировка задач теплопроводности. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Изучение любого физического явления сводится к установлению зависимости между величинами, характеризующими это явление. При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии: количество тепла dQ , введенное в элементарный объем dv извне за время $d\tau$ вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников тепла, равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в этом объеме:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ,$$

где dQ_1 – количество тепла, введенное в элементарный объем dv путем теплопроводности за время $d\tau$; dQ_2 – количество тепла, которое за время $d\tau$ выделилось в элементарном объеме dv за счет внутренних источников тепла; dQ – изменение внутренней энергии вещества, содержащегося в элементарном объеме dv за время $d\tau$. Тогда

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \cdot dv \cdot d\tau + q_v \cdot dv \cdot d\tau = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot dv \cdot d\tau.$$

Выразим частную производную от температуры по времени:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (1.2)$$

Плотность теплового потока в соответствии с законом Фурье равна $q = -\lambda \cdot \text{grad } t$. Проекции вектора плотности теплового потока на соответствующие координатные оси определим как $q_x = -\lambda \cdot \partial t / \partial x$, $q_y = -\lambda \cdot \partial t / \partial y$ и $q_z = -\lambda \cdot \partial t / \partial z$. Подставим эти выражения в (1.2) и получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (1.3)$$

Если обозначить через оператор Лапласа $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ и $a = \lambda / (c \cdot \rho)$ – коэффициент температуропроводности, то дифференциальное уравнение теплопроводности (1.3) можно записать как

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (1.4)$$

Коэффициент температуропроводности характеризует скорость изменения температуры в нестационарных процессах, является мерой теплоинерционных свойств тела. Скорость изменения температуры будет тем выше, чем больше коэффициент температуропроводности, т.е. при прочих равных условиях выравнивание температуры будет происходить быстрее. Также коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества: для металлов больше, чем для жидкостей и газов.

В цилиндрической системе координат выражение $\nabla^2 t$ имеет вид

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

**Краевые условия задач теплопроводности,
различные способы задания граничных условий.
Закон Ньютона – Рихмана**

Дифференциальное уравнение теплопроводности (1.3) выведено на основе общих законов физики и описывает процесс теплопроводности в самом общем виде. Любое дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений. Для того, чтобы выделить конкретный рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальным уравнениям надо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются условиями однозначности или краевыми условиями и включают [15]:

- 1) геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- 2) физические условия, характеризующие физические свойства тела (теплопроводность, теплоемкость, плотность, мощность внутренних источников тепла и т.д.);

3) временные или начальные условия, характеризующие распределение температуры в изучаемом теле в начальный момент времени: при $\tau = 0$ $t = f(x, y, z)$;

4) граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой.

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

Граничные условия первого рода, в которых задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени: $t_c = f(x, y, z, \tau)$; частный случай $t_c = \text{const}$.

Граничные условия второго рода, в которых задается величина теплового потока для каждой точки поверхности тела и для любого момента времени: $q_c = f(x, y, z, \tau)$; частный случай $q_c = \text{const}$. Например, нагревание металлических изделий в высокотемпературных печах.

Граничные условия третьего рода, в которых задается температура окружающей среды $t_{\text{ж}}$ и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания. Для его описания используется закон Ньютона – Рихмана: плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела t_c и окружающей среды $t_{\text{ж}}$:

$$q = \alpha (t_c - t_{\text{ж}}).$$

Здесь α – коэффициент теплоотдачи, характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно равен количеству тепла, отдаваемому (воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в один градус.

По закону сохранения энергии количество тепла, отводимое с единицы поверхности вследствие теплоотдачи, должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, тогда

$$\alpha \cdot (t_c - t_{\text{ж}}) = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_c - t_{\text{ж}}).$$

Граничные условия четвертого рода характеризуют теплообмен системы тел или тела с окружающей средой по закону теплопроводности (идеальный контакт):

$$\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_c = \lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_c.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение совместно с условиями однозначности дают полную математическую формулировку конкретной задачи теплопроводности, которая может быть решена аналитически, численно, экспериментально.

Контрольные вопросы

1. Каким методом: феноменологическим или статистическим – описываются процессы теплопроводности?
2. В чем отличие между феноменологическим и статистическим методами описания тепловых процессов?
3. Что называют температурным полем, градиентом температуры?
4. Дайте определение изотермической поверхности и изотермы.
5. Дайте определение и назовите единицы измерения следующих физических величин: тепловой поток, плотность теплового потока, коэффициент теплопроводности.
6. Сформулируйте законы Фурье и Ньютона – Рихмана.
7. Перечислите диапазон значений коэффициента теплопроводности металлов, неметаллов, жидкостей и газов.
8. Перечислите допущения, необходимые для вывода дифференциального уравнения теплопроводности.
9. Какой закон положен в основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности?
10. Дайте определение и запишите единицы измерения объемной мощности внутренних источников тепла, коэффициентов температуропроводности и теплоотдачи.
11. Запишите дифференциальное уравнение теплопроводности.
12. Поясните, почему необходимо дополнять дифференциальные уравнения краевыми условиями.
13. Перечислите состав краевых условий (условий однозначности).
14. Что определяют геометрические и физические условия?
15. Что задают и в каком случае отсутствуют начальные условия?
16. Перечислите виды граничных условий. Что они выражают с точки зрения математической физики и при решении задач теплопроводности?

Лекция 2. Теплопроводность плоской стенки без внутренних источников тепла

Температурное поле в плоской стенке при граничных условиях первого рода. Приведение уравнений к безразмерному виду. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Теплопроводность через многослойную стенку. Эквивалентный коэффициент теплопроводности плоской стенки. Передача тепла при граничных условиях третьего рода (теплопередача). Коэффициент теплопередачи. Термическое сопротивление теплопроводности, теплоотдачи, теплопередачи. Граничные условия второго и третьего рода.

Температурное поле в плоской стенке при граничных условиях первого рода. Приведение уравнений к безразмерному виду. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

При установившемся, или стационарном, тепловом режиме температура тела не зависит от времени. Рассмотрим однородную и изотропную стенку (рис. 2.1) толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянными температуры t_{c1} и t_{c2} . Дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

Граничные условия в данной задаче зададим следующим образом:

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_{c1}; \quad \text{при } x = \delta \quad t = t_{c2}. \quad (2.2)$$

Закон распределения температуры по толщине стенки найдем, дважды проинтегрировав уравнение (2.1) и найдя константы интегрирования из граничных условий, заданных уравнениями (2.2).

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} \cdot x. \quad (2.3)$$

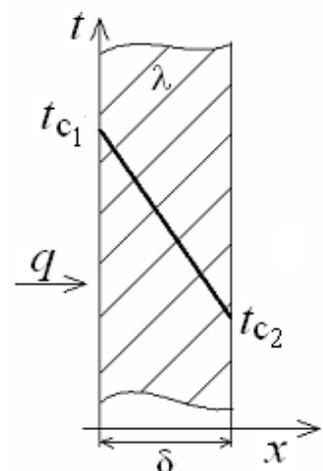


Рис.2.1

Для определения количества тепла, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени в направлении оси Ox , воспользуемся законом Фурье, согласно которому $q = -\lambda \cdot \partial t / \partial x$.

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.4) следует, что количество тепла, проходящее через единицу поверхности в единицу времени прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности и температурному напору и обратно пропорционально толщине стенки.

Отношение λ / δ называется тепловой проводимостью стенки, а обратная величина δ / λ – тепловым или термическим сопротивлением стенки. Последнее представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока. Зная удельный тепловой поток, легко вычислить общее количество тепла, которое передается через поверхность стенки величиной F за промежуток времени τ :

$$Q_{\tau} = q \cdot F \cdot \tau = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_{c1} - t_{c2}) \cdot F \cdot \tau.$$

Из уравнения (2.4) найдем величину перепада температуры на длину стенки $\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} = \frac{q}{\lambda}$ и подставим ее в уравнение (2.3):

$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} \cdot x. \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока.

Если отсчет избыточной температуры в стенке вести от наименьшей заданной температуры t_{c2} , то уравнение (2.3) можно привести к безразмерному виду. Обозначим:

$\Delta t = t - t_{c2}$ – текущий температурный напор или избыточная температура;

$\Delta t_0 = t_{c1} - t_{c2}$ – полный температурный напор или наибольшая избыточная температура.

После введения этих обозначений уравнение (2.3) запишется как

$$\Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{\delta} \cdot x$$

или

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{\delta}.$$

Обозначим

$\Delta t / \Delta t_0 = \Theta$ – безразмерный температурный напор или безразмерная избыточная температура;

$x / \delta = X$ – безразмерная координата, тогда получим:

$$\Theta = 1 - X. \quad (2.6)$$

Уравнение температурного поля (2.6) является универсальным, так как распределение температуры в стенке можно представить единой прямой для любых заданных значений температур стенки t_{c1} , t_{c2} и ее толщины δ (рис. 2.2).

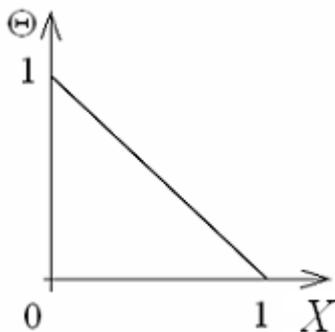


Рис. 2.2

Выражения (2.3) и (2.6) получены в предположении, что коэффициент теплопроводности является постоянной величиной. В действительности это не всегда бывает так. Рассмотрим зависимость коэффициента теплопроводности только от температуры, которая для многих материалов близка к линейной $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$, где λ_0 – значение коэффициента теплопроводности при 0°C . Тогда плотность теплового потока на поверхности пластины

$$q = \frac{\lambda_{\text{cp}}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}),$$

где $\lambda_{\text{cp}} = \lambda_0 \cdot \left(1 + b \frac{t_{c1} + t_{c2}}{2}\right)$ – коэффициент теплопроводности при среднеарифметическом значении температуры в стенке.

В этом случае выражение для температурного поля

$$t = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{c1}\right)^2 - \frac{2 \cdot q \cdot x}{\lambda_0 \cdot b}} - \frac{1}{b}. \quad (2.7)$$

Из этого уравнения следует, что температура в стенке изменяется не линейно, а по кривой. Характер температурной кривой определяется знаком и численным значением коэффициента b .

**Теплопроводность через многослойную стенку.
Эквивалентный коэффициент теплопроводности плоской стенки**

Рассмотрим теплопроводность многослойной стенки (рис. 2.3), состоящей из n однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова. При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же, т. е. $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$.

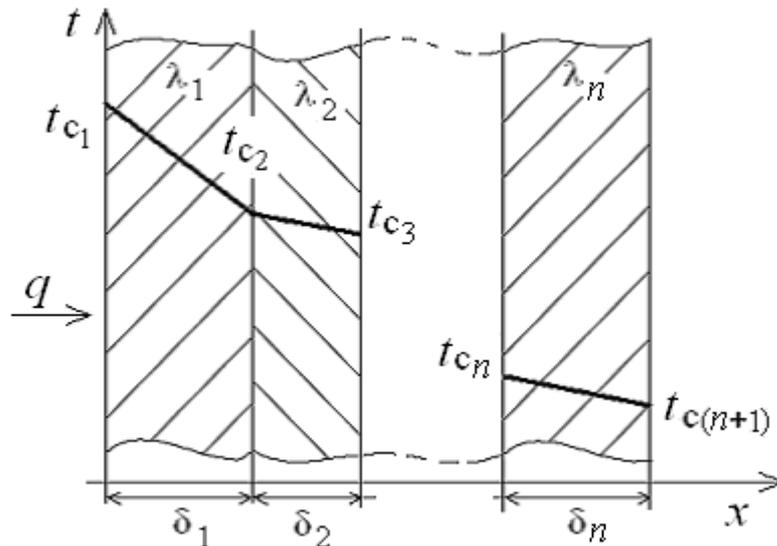


Рис. 2.3

При заданных температурах внешних поверхностей такой стенки, размерах слоев и, соответственно, коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений для плотности теплового потока каждого из слоев, из которых выразим температурные напоры:

$$t_{c1} - t_{c2} = q \cdot \delta_1 / \lambda_1,$$

$$t_{c2} - t_{c3} = q \cdot \delta_2 / \lambda_2,$$

...

$$t_{cn} - t_{c(n+1)} = q \cdot \delta_n / \lambda_n.$$

Сложив левые и правые части уравнений, получим:

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q \cdot (\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \dots + \delta_n / \lambda_n).$$

Отсюда плотность теплового потока

$$q = \frac{t_{c1} - t_{cn+1}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{c1} - t_{cn+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (2.8)$$

Величина $\sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$, равная сумме тепловых сопротивлений всех n слоев, называется полным тепловым или термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

Температуры на границе соприкосновения двух соседних слоев равны:

$$\begin{aligned} t_{c2} &= t_{c1} - q \cdot \delta_1 / \lambda_1, \\ t_{c3} &= t_{c2} - q \cdot \delta_2 / \lambda_2, \\ &\dots \\ t_{cn+1} &= t_{cn} - q \cdot \delta_n / \lambda_n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Внутри каждого из слоев температура изменяется согласно уравнениям (2.3), (2.5) или (2.7), а для многослойной стенки в целом температурная кривая представляет ломаную линию.

При сравнении переноса тепла через многослойную стенку и стенку из однородного материала удобно ввести в рассмотрение эквивалентный коэффициент теплопроводности для многослойной стенки $\lambda_{\text{ЭКВ}}$. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой Δ равна толщине многослойной стенки $\sum_{i=1}^n \delta_i$, а тепловое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_{\text{ЭКВ}} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда получаем:

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Таким образом, эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{ЭКВ}}$ зависит не только от теплофизических свойств слоев, но и от их толщины.

**Передача тепла при граничных условиях третьего рода (теплопередача).
Коэффициент теплопередачи. Термическое сопротивление
теплопроводности, теплоотдачи, теплопередачи**

Передача тепла от одной жидкой среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется теплопередачей. Теплопередача включает в себя теплоотдачу от более горячей жидкости к стенке, теплопроводность в стенке, теплоотдачу от стенки к более холодной подвижной среде [12, 18]

Пусть плоская однородная стенка имеет толщину δ (рис. 2.4). Заданы коэффициент теплопроводности λ , температуры окружающей среды $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, а также коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 . Будем считать, что $t_{ж1}$, $t_{ж2}$, α_1 и α_2 постоянны и не меняются вдоль поверхности. Это позволяет рассматривать изменение температуры жидкостей и стенки только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной, а также температуры на поверхностях стенки.

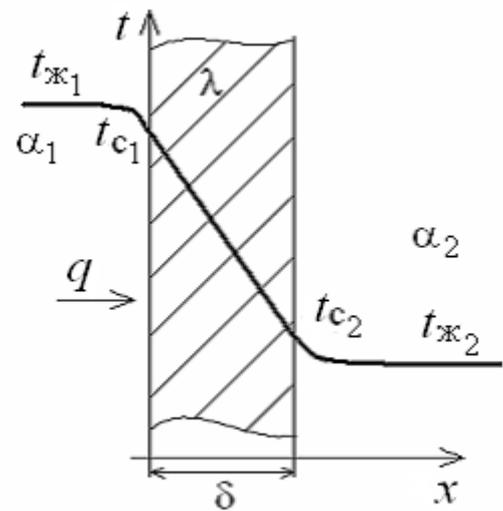


Рис. 2.4

Удельный тепловой поток от горячей жидкости к стенке определяется из закона Ньютона – Рихмана уравнением

$$q = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1}) .$$

При стационарном тепловом режиме тот же тепловой поток пройдет путем теплопроводности через твердую стенку: $q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) .$

Этот же тепловой поток передается от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счет теплоотдачи $q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}) .$

Аналогично решению для многослойной плоской стенки выразим температурные напоры и почленно сложим правые и левые части, тогда

$$t_{ж1} - t_{ж2} = q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) .$$

Выразим плотность теплового потока:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \cdot (t_{ж1} - t_{ж2}) ,$$

Здесь $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ – коэффициент теплопередачи, характеризующий

интенсивность передачи тепла от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку, имеет ту же размерность, что и коэффициент теплоотдачи, численно равен количеству тепла, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени при разности температур между жидкостями в один градус.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным термическим сопротивлением теплопередачи и для однослойной стенки записывается как $R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$.

Из этого выражения видно, что полное термическое сопротивление складывается из частных термических сопротивлений: $R_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ – термического

сопротивления теплоотдачи от горячей жидкости к поверхности стенки; $R_c = \frac{\delta}{\lambda}$ – термического сопротивления теплопроводности стенки;

$R_2 = \frac{1}{\alpha_2}$ – термического сопротивления теплоотдачи от поверхности стенки к холодной жидкости.

Поскольку общее термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то в случае многослойной стенки нужно учитывать термическое сопротивление теплопроводности каждого слоя. Тогда полное термическое сопротивление теплопередачи через многослойную стенку

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} ,$$

отсюда коэффициент теплопередачи многослойной стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} .$$

Удельный тепловой поток через многослойную стенку, состоящую из n слоев,

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \cdot (t_{ж1} - t_{ж2}).$$

Тепловой поток через поверхность стенки $Q = q \cdot F = k \cdot \Delta t \cdot F$.
Температуры поверхностей однородной стенки можно найти как

$$t_{c1} = t_{ж1} - \frac{q}{\alpha_1},$$

$$t_{c2} = t_{ж1} - q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right) = t_{ж2} + \frac{q}{\alpha_2}.$$

Для многослойной стенки температура на границе соприкосновения двух слоев i и $i + 1$ при граничных условиях третьего рода может быть найдена из уравнения

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{j=1}^i \frac{\delta_j}{\lambda_j} \right).$$

Внутри любого слоя распределение температуры может быть найдено по уравнениям (2.5) или (2.7), в которых координата отсчитывается от начала соответствующего слоя.

Граничные условия второго и третьего рода

Рассмотрим случай, когда при передаче тепла через однородную и изотропную стенку на одной ее поверхности заданы граничные условия второго рода в виде $q_c = \text{const}$ при $x = 0$; на другой ее поверхности заданы коэффициент теплоотдачи α_2 и температура окружающей среды $t_{ж2}$, то есть граничные условия третьего рода (рис. 2.5). Внутренние источники тепла в стенке отсутствуют. Такая задача сводится к нахождению распределения температуры в стенке и определению температур на ее поверхностях. В силу стационарности теплового режима можно записать следующую систему уравнений:

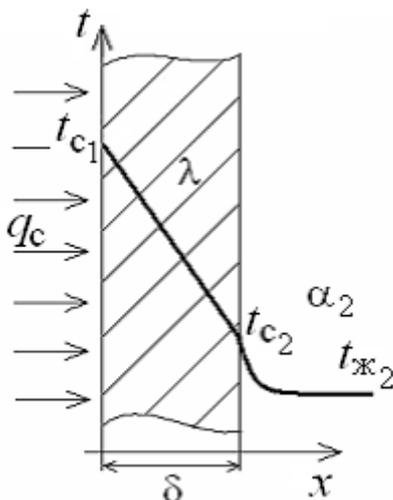


Рис. 2.5

$$q_c = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_{c1} - t_{c2}),$$

$$q_c = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}),$$

из которой следует, что при заданном значении q_c

$$t_{c2} = t_{ж2} + q_c / \alpha_2,$$

$$t_{c1} = t_{c2} + q_c \cdot \frac{\delta}{\lambda} = t_{ж2} + q_c \cdot \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right).$$

Контрольные вопросы

1. Запишите дифференциальное уравнение теплопроводности и его решение для однородной тонкой плоской стенки с постоянным коэффициентом теплопроводности.
2. Запишите распределение температуры в однородной тонкой плоской стенке в безразмерном виде.
3. Схематически изобразите распределение температуры в однородной плоской стенке для постоянного коэффициента теплопроводности и линейно зависящего от температуры коэффициента теплопроводности.
4. Запишите выражение для плотности теплового потока в случае многослойной плоской стенки, состоящей из n однородных слоев.
5. Дайте определение и запишите выражение для расчета эквивалентного коэффициента теплопроводности многослойной плоской стенки.
6. Дайте определение процесса теплопередачи.
7. Дайте определение и запишите единицы измерения коэффициента теплопередачи, термических сопротивлений теплопроводности, теплоотдачи, теплопередачи.
8. Запишите выражение для определения теплового потока через многослойную плоскую стенку в процессе теплопередачи.
9. Поясните сущность методики вычисления плотности теплового потока для многослойной плоской стенки и для процесса теплопередачи.
10. Запишите выражение для определения температуры в плоскости соприкосновения произвольных слоев.
11. Поясните сущность методики вычисления плотности теплового потока для граничных условий второго и третьего рода.

Лекция 3. Теплопроводность плоской стенки при наличии внутренних источников тепла

Плотность объемного тепловыделения. Температурное поле в плоской стенке при наличии тепловыделений. Симметричные условия охлаждения пластины. Пластина с одной теплоизолированной поверхностью. Пластина с разными (постоянными) температурами поверхностей. Критерий Поме-ранцева. Несимметричные условия охлаждения пластины.

Плотность объемного тепловыделения

В рассматриваемых ранее задачах внутренние источники тепла отсутствовали. Однако в ряде случаев внутри объектов исследования могут протекать процессы, в результате которых будет выделяться или поглощаться тепло, например, выделение джоулева тепла при протекании электрического тока; выделение тепла в ТВЭЛах атомных реакторов; выделение или поглощение тепла при протекании химических реакций [18].

Количественно интенсивность объемного выделения (поглощения) тепла характеризуется плотностью объемного тепловыделения q_v – тепловым потоком, выделившимся в единице объема. Величина q_v также имеет два названия: удельная производительность внутренних источников тепла или объемная плотность теплового потока. В зависимости от знака q_v говорят об источниках или стоках тепла; в зависимости от особенностей изменения величины q_v в пространстве различают точечные, линейные, поверхностные и объемные источники тепла.

Температурное поле в плоской стенке при наличии тепловыделений

Для стационарного режима дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии источников тепла имеет вид

$$\nabla^2 t + q_v / \lambda = 0 . \quad (3.1)$$

В одномерном случае (примером является плоская пластина, толщина которой много меньше двух других ее размеров) дифференциальное уравнение теплопроводности (3.1) упрощается и в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (3.2)$$

После интегрирования уравнения (3.2) получим:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v x}{\lambda} + C_1; \quad (3.3)$$

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (3.4)$$

Постоянные интегрирования определяются в зависимости от условий охлаждения на поверхности пластины.

Симметричные условия отвода теплоты от пластины

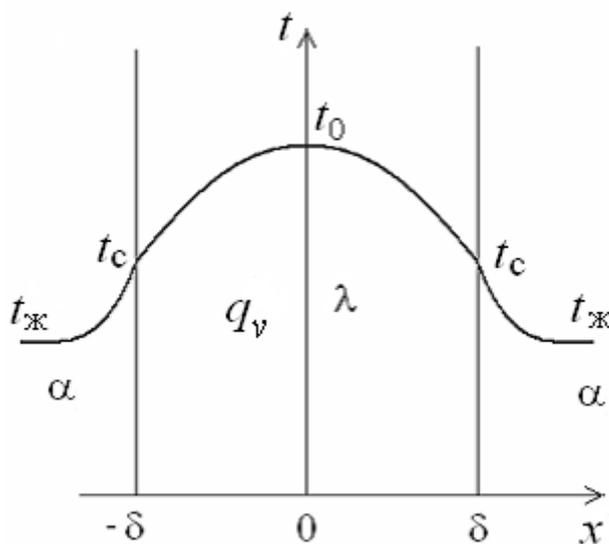


Рис. 3.1

Рассмотрим длинную пластину, толщина которой 2δ – величина малая по сравнению с двумя другими размерами (рис. 3.1). Источники равномерно распределены по всему объему и равны $q_v = \text{const}$. Заданы постоянные коэффициенты теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ и температура жидкости вдали от пластины $t_{\text{ж}} = \text{const}$. Благодаря симметричному отводу теплоты температуры обеих поверхностей пластины одинаковы. При указанных условиях температура пластины будет изменяться

только вдоль оси x , направленной нормально к поверхности тела. Температуры на оси пластины t_0 и на ее поверхности t_c неизвестны. Кроме этих температур, необходимо найти распределение температуры в пластине и количество тепла, отданного в окружающую среду.

Дифференциальное уравнение (3.2) и его решения (3.3) и (3.4) описывают распределение температуры в пластине. Граничные условия на поверхностях пластины при $x = \pm\delta$ определяются из уравнения теплоотдачи $\alpha \cdot (t_c - t_{\text{ж}}) = \mp \lambda \cdot (\partial t / \partial x)_{x=\pm\delta}$.

Поскольку граничные условия для обеих сторон пластины одинаковые, температурное поле внутри пластины должно быть симметричным относительно плоскости $x = 0$. В этой точке плотность теплового потока равна нулю. Тепло с одинаковой интенсивностью отводится через левую и правую поверхности тела. Одинаково и тепловыделение в обеих половинах пластины. Это означает, что можно далее рассматривать лишь одну половину пластины, например, правую, и записать для нее граничные условия в следующем виде:

$$x = 0: \quad (\partial t / \partial x)_{x=0} = 0; \quad x = \delta: \quad -\lambda \cdot (\partial t / \partial x)_{x=\delta} = \alpha \cdot (t_c - t_{\text{ж}}). \quad (3.5)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий (3.5). В этом случае уравнение температурного поля определяется по формуле

$$t(x) = t_{\text{ж}} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2), \quad (3.6)$$

из которой следует, что температура в плоской стенке в случае симметричной задачи распределяется по параболическому закону.

В рассматриваемой задаче плотность теплового потока изменяется вдоль оси x по закону $q(x) = q_v x$. Тепловой поток с единицы поверхности пластины (при $x = \delta$) $q = \alpha \cdot (t_c - t_{\text{ж}}) = q_v \delta$, и общее количество тепла, отданное всей поверхностью в единицу времени,

$$Q = q \cdot F = q_v \cdot \delta \cdot 2F_1.$$

Так как $t_c = t(\delta) = t_{\text{ж}} + \frac{q_v \delta}{\alpha}$, то $t(x) = t_c + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2)$. Температура на оси симметрии пластины (при $x = 0$) $t_0 = t_c + \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2$, а перепад температур между

осью симметрии стенки и ее поверхностью $t_0 - t_c = \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2 = \frac{q}{2\lambda} \delta$.

Если коэффициент теплопроводности материала стенки является линейной функцией температуры $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$, то уравнение температурной кривой определяется выражением

$$t(x) = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_0 + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 b}}.$$

Пластина с одной теплоизолированной поверхностью

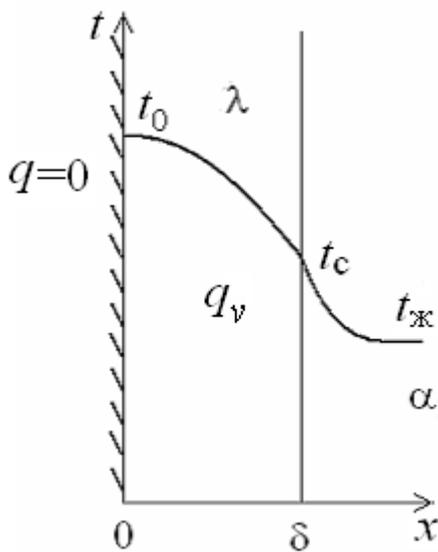


Рис. 3.2

Пусть одна из поверхностей пластины, рассмотренной в предыдущем случае, будет теплоизолированной (рис. 3.2), а на другой ее поверхности заданы условия охлаждения: коэффициент теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ и температура жидкости вдали от пластины $t_{\text{ж}} = \text{const}$. Источники равномерно распределены по всему объему и равны $q_v = \text{const}$. Обозначим толщину пластины δ и воспользуемся решением предыдущей задачи (3.6) для половины симметрично охлаждаемой пластины. Здесь максимальное значение температуры пластины t_0 будет соответствовать ее левой поверхности, через которую отсутствует поток тепла.

Пластина с разными (постоянными) температурами поверхностей. Критерий Померанцева

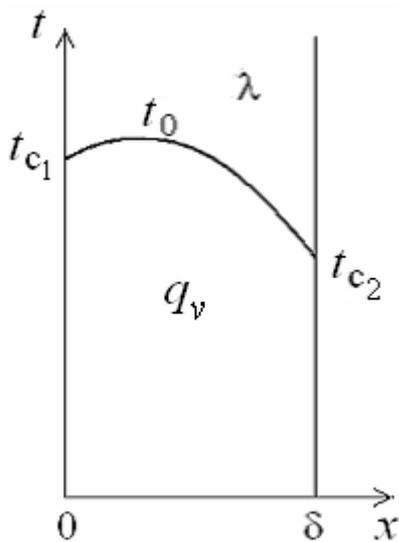


Рис. 3.3

Рассмотрим длинную пластину, толщина которой δ – величина малая по сравнению с двумя другими размерами (рис. 3.3). Источники равномерно распределены по всему объему и равны $q_v = \text{const}$. Температуры стенок поддерживаются постоянными: при $x = 0$ $t = t_{c1}$; при $x = \delta$ $t = t_{c2}$. Температура пластины будет изменяться только вдоль оси x . Необходимо найти распределение температуры в пластине [8].

Дифференциальное уравнение (3.2) и его решение (3.4) такие же. Постоянные интегрирования находим из новых граничных условий:

при $x = 0$ $t = t_{c1}$; при $x = \delta$ $t = t_{c2}$. Тогда распределение температуры в пластине описывается уравнением

$$t(x) = t_{c1} + \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} x + \frac{q_v \delta}{2\lambda} x - \frac{q_v}{2\lambda} x^2. \tag{3.7}$$

Преобразуем выражение (3.7):

$$t(x) = t_{c1} - \frac{x}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}) + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right).$$

Отнимем от его правой и левой частей температуру стенки t_{c2} , тогда

$$t(x) - t_{c2} = t_{c1} - t_{c2} - \frac{x}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}) + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right).$$

Разделим правую и левую части на $(t_{c1} - t_{c2})$:

$$\Theta = \frac{t(x) - t_{c2}}{t_{c1} - t_{c2}} = 1 - \frac{x}{\delta} + \frac{Po}{2} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{\delta^2} \right),$$

Здесь $Po = \frac{q_v \delta^2}{\lambda(t_{c1} - t_{c2})}$ – число Померанцева, характеризующее отношение мощности внутреннего источника теплоты q_v к мощности теплового потока, переносимого в единице объема за счет теплопроводности при перепаде температур $(t_{c1} - t_{c2})$.

Обозначим $X = x / \delta$ как безразмерную координату, тогда

$$1 - X + \frac{Po}{2}(X - X^2) = (1 - X) + X \frac{Po}{2}(1 - X) = (1 - X) \left(1 + \frac{Po}{2} X \right).$$

Окончательно распределение температуры в безразмерном виде описывается выражением

$$\Theta = (1 - X) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} Po \cdot X \right). \quad (3.8)$$

В зависимости от величины числа Померанцева распределение температуры может иметь вид выпуклой или вогнутой кривой, причем максимальная температура может лежать либо внутри пластины, либо на одной из ее поверхностей. В случае отсутствия внутренних источников тепла ($Po = 0$) распределение температуры, описываемое уравнением (3.8), совпадает с формулой (2.6).

Несимметричные условия отвода теплоты от пластины

Рассмотрим пластину толщиной δ с равномерно распределенными внутренними источниками тепла, условия отвода теплоты от которой различны (рис. 3.4): с одной стороны пластины находится одна жидкость с коэффициентом теплоотдачи α_1 и температурой вдали от пластины $t_{ж1}$, а с другой стороны – другая жидкость с коэффициентом теплоотдачи α_2 и температурой вдали от пластины $t_{ж2}$. Необходимо найти распределение температуры в пластине.

В случае несимметричных условий отвода теплоты от пластины плоскость, через которую тепловой поток отсутствует, сместится из центра пластины к одной из ее поверхностей в некоторую точку x_0 . Решения следует искать отдельно для левой половины пластины и для ее правой половины (воспользовавшись общим решением (3.4) дифференциального уравнения (3.2)), в которых будут разными граничные условия и, следовательно, изменятся значения постоянных интегрирования.

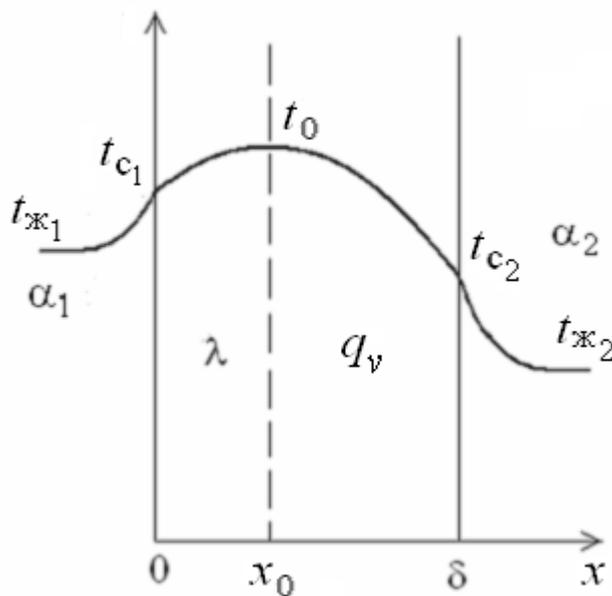


Рис. 3.4

Граничные условия для правой половины пластины: при $x = x_0$ плотность теплового потока $(dt/dx)_{x=x_0} = 0$; на поверхности пластины при $x = \delta$ из уравнения теплоотдачи

$$-\lambda \cdot (dt/dx)_{x=\delta} = \alpha_2 \cdot (t_{c2} - t_{ж2}) .$$

Подставляя значения постоянных интегрирования из таких граничных условий в уравнение (3.4) и выполнив группировку подобных членов, получим распределение температуры в правой части пластины для $x_0 \leq x \leq \delta$:

$$t^{прав}(x) = t_{ж2} + \frac{q_v}{\alpha_2} (\delta - x_0) - \frac{q_v x_0}{\lambda} (\delta - x) + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2) . \tag{3.9}$$

Температура правой поверхности пластины

$$t_{c2} = t(x = \delta) = t_{ж2} + \frac{q_v}{\alpha_2} (\delta - x_0) .$$

Граничные условия для левой половины пластины: при $x = x_0$ $(dt/dx)_{x=x_0} = 0$; на внешней границе при $x = 0$ из уравнения теплоотдачи $\lambda \cdot (dt/dx)_{x=0} = \alpha_1 \cdot (t_{c1} - t_{ж1})$.

Подставляя значения постоянных интегрирования из данных граничных условий в уравнение (3.4) и выполнив группировку подобных членов, получим распределение температуры в левой части пластины для $0 \leq x \leq x_0$:

$$t^{\text{лев}}(x) = t_{ж1} + \frac{q_v x_0}{\alpha_1} + \frac{q_v x_0}{\lambda} x - \frac{q_v}{2\lambda} x^2. \quad (3.10)$$

Температура левой поверхности пластины

$$t_{c1} = t(x = 0) = t_{ж1} + \frac{q_v x_0}{\alpha_1}.$$

Для определения координаты x_0 необходимо приравнять решения для правой и левой частей пластины в этой точке $t^{\text{лев}}(x_0) = t^{\text{прав}}(x_0)$:

$$x_0 = \frac{\frac{t_{ж2} - t_{ж1}}{q_v} + \delta \cdot \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{2\lambda} \right)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Максимальное значение температуры $t_0 = t(x_0)$ находим по формуле (3.9) или (3.10).

Контрольные вопросы

1. Запишите стационарное одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла в декартовых координатах и его решение.
2. Перечислите процессы, при протекании которых происходит объемное выделение (поглощение) тепла.
3. Дайте определение и запишите единицы измерения объемной мощности внутренних источников тепла.
4. Какому закону подчиняется распределение температуры в плоской стенке при наличии внутренних источников тепла в случае симметричных условий охлаждения?

5. Что общего и в чем различие выражений для распределения температуры в плоской стенке при наличии тепловыделения для симметричных условий охлаждения и пластины с одной теплоизолированной поверхностью?

6. Схематически в зависимости от числа Померанцева изобразите распределение температуры в плоской стенке при протекании в ней химической реакции, если заданы разные (постоянные) температуры ее поверхностей.

7. Можно ли для несимметричных условий охлаждения пластины рассчитать распределение температуры для правой половины пластины по формулам для левой половины пластины?

8. Запишите выражение для определения координаты x_0 (соответствующей максимальной температуре в пластине), если вместо температур жидкостей заданы температуры поверхностей пластины.

Лекция 4.

Теплопроводность цилиндрической стенки без внутренних источников тепла

Линейная плотность теплового потока. Температурное поле в цилиндрической стенке при граничных условиях первого рода. Теплопроводность через многослойную цилиндрическую стенку. Эквивалентный коэффициент теплопроводности цилиндрической стенки. Теплопроводность через цилиндрическую стенку при граничных условиях третьего рода (теплопередача). Линейный коэффициент теплопередачи. Линейное термическое сопротивление теплопроводности, теплоотдачи, теплопередачи. Расчет теплопередачи в тонких цилиндрических стенках. Критический диаметр цилиндрической стенки.

Линейная плотность теплового потока Температурное поле в цилиндрической стенке при граничных условиях первого рода

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в бесконечной цилиндрической стенке (трубе) с внутренним диаметром d_1 и наружным диаметром d_2 ([рис. 4.1](#)) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . На наружных поверхностях трубы поддерживаются постоянными значения температуры t_{c1} и t_{c2} . Необходимо найти распределение температуры в цилиндрической стенке и тепловой поток через нее. В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение теплопроводности удобно записать в цилиндрической системе координат (ось Oz совмещена с осью трубы):

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

Так как труба бесконечная и изотропная, то дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

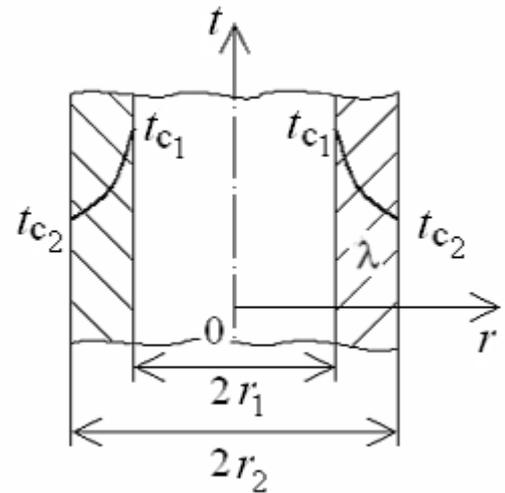


Рис. 4.1

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0. \quad (4.1)$$

Граничные условия:

$$\text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}; \quad \text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}. \quad (4.2)$$

Если решить уравнение (4.1) совместно с условиями (4.2), то получим уравнение температурного поля в цилиндрической стенке. Задача решается введением новой переменной

$$t = C_1 \ln r + C_2. \quad (4.3)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно определить, если в уравнение (4.3) подставить граничные условия (4.2):

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

или

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln(d/d_1)}{\ln(d_2/d_1)}. \quad (4.4)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение логарифмической кривой. То обстоятельство, что распределение температуры в цилиндрической стенке является криволинейным, можно объяснить следующим. В случае плоской стенки удельный тепловой поток q остается одинаковым для всех изотермических поверхностей. По этой причине градиент температуры сохраняет для всех изотермических поверхностей постоянную величину. В случае цилиндрической стенки плотность теплового потока через лю-

бую изотермическую поверхность будет величиной переменной, так как величина поверхности зависит от радиуса.

Для определения количества теплоты, проходящего через цилиндрическую поверхность величиной $F = 2\pi \cdot r \cdot l$ в единицу времени, следует воспользоваться законом Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = \frac{2\pi\lambda l(t_{c1} - t_{c2})}{\ln(d_2 / d_1)}. \quad (4.5)$$

Из уравнения (4.5) следует, что количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, полностью определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса. Тепловой поток может быть отнесен либо к единице длины трубы, либо к единице внутренней или внешней поверхности. Тогда расчетные формулы для удельных тепловых потоков примут следующий вид.

Тепловой поток через единицу внутренней поверхности

$$\frac{Q}{\pi d_1 l} = q_1 = \frac{2\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{d_1 \ln(d_2 / d_1)}.$$

Тепловой поток через единицу внешней поверхности

$$\frac{Q}{\pi d_2 l} = q_2 = \frac{2\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{d_2 \ln(d_2 / d_1)}.$$

Тепловой поток на единицу длины трубы

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (4.6)$$

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, имеет размерность Вт/м и называется линейной плотностью теплового потока. Как видно из уравнения (4.6), при неизменном отношении диаметров линейная плотность теплового потока не зависит от поверхности цилиндрической стенки. Плотности теплового потока через внутреннюю и внешнюю стенки неодинаковы, причем первая больше второй.

**Теплопроводность через многослойную цилиндрическую стенку.
Эквивалентный коэффициент теплопроводности
многослойной цилиндрической стенки**

Рассмотрим теплопроводность многослойной цилиндрической стенки, состоящей из n однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях соседних слоев одинакова. Заданы температуры на внешних поверхностях стенки, коэффициенты теплопроводности и толщины слоев (рис. 4.2). Метод решения аналогичен методу для плоской многослойной стенки. При стационарном тепловом режиме линейная плотность теплового потока не меняется по толщине стенки, т. е.

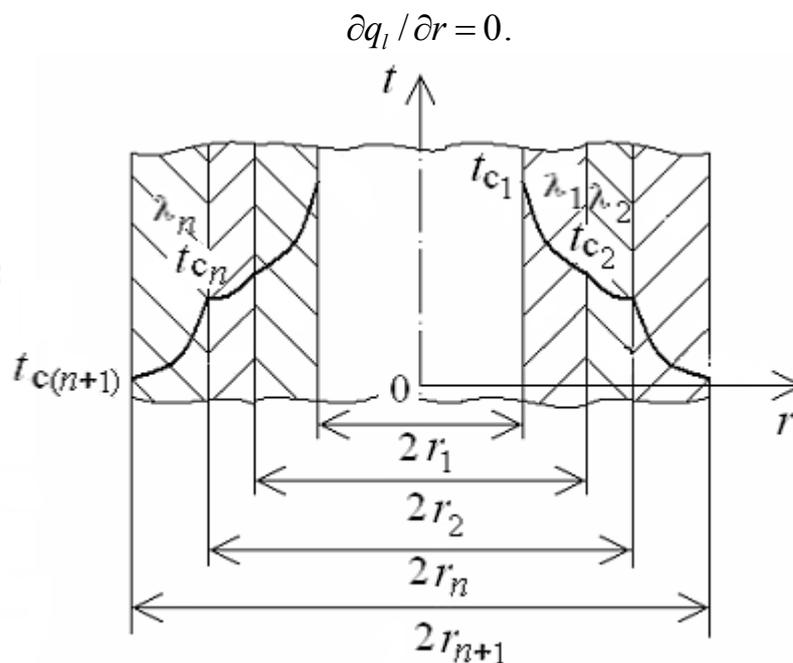


Рис. 4.2

Составим систему уравнений линейных плотностей теплового потока для каждого из слоев. Выразим из них температурные напоры и почленно сложим уравнения, тогда

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = \frac{q_l}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{1}{2\lambda_n} \cdot \ln \frac{d_{n+1}}{d_n} \right).$$

Отсюда линейная плотность теплового потока

$$q_l = \frac{\pi (t_{c1} - t_{c(n+1)})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}.$$

Величина $\frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$ называется линейным термическим сопротивлением теплопроводности отдельного слоя, а величина $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$ представляет собой термическое сопротивление всех слоев и называется полным линейным термическим сопротивлением теплопроводности многослойной цилиндрической стенки.

Температура на границе соприкосновения любых слоев

$$t_{c(n+1)} = t_{cn} - \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{2\lambda_n} \cdot \ln \frac{d_{n+1}}{d_n}.$$

Внутри любого слоя температура изменяется по логарифмической кривой, распределение которой можно найти по формуле (4.4).

Понятие об эквивалентном коэффициенте теплопроводности для цилиндрической стенки принципиально не отличается от такого же понятия для многослойной плоской стенки: термическое сопротивление, вычисленное по эквивалентному коэффициенту теплопроводности, должно равняться сумме термических сопротивлений всех слоев, образующих многослойную цилиндрическую стенку:

$$\frac{1}{2\lambda_{\text{ЭКВ}}} \cdot \ln \frac{d_{n+1}}{d_1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}.$$

Отсюда эквивалентный коэффициент теплопроводности

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \frac{\ln(d_{n+1} / d_1)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}.$$

Так же, как и для плоской стенки, эквивалентный коэффициент теплопроводности для многослойной цилиндрической стенки зависит не только от физических свойств слоев, но и от общей толщины стенки.

**Теплопроводность через цилиндрическую стенку при граничных условиях третьего рода (теплопередача).
Линейный коэффициент теплопередачи.
Линейные термические сопротивления теплопроводности, теплоотдачи, теплопередачи**

Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу) с внутренним диаметром d_1 и наружным диаметром d_2 (рис. 4.3) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Заданы постоянные температуры подвижных сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, а также постоянные значения коэффициентов теплоотдачи на внутренней и наружной поверхностях трубы α_1 и α_2 . Необходимо найти температуры поверхностей цилиндрической стенки t_{c1} и t_{c2} и тепловой поток через нее.

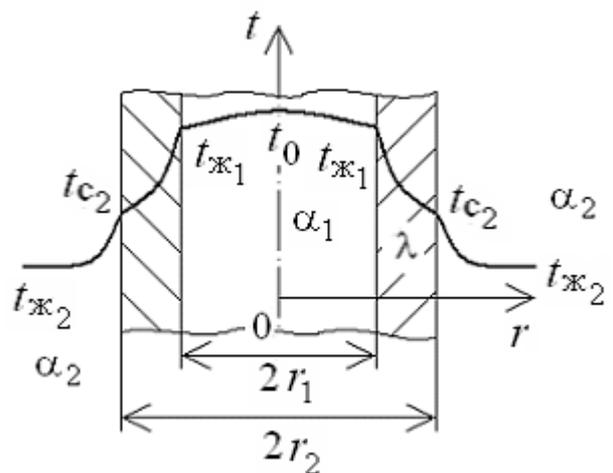


Рис. 4.3

Будем полагать, что длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тогда потерями тепла с торцов трубы можно пренебречь и при установившемся тепловом режиме количество тепла, которое будет передаваться от горячей среды к поверхности стенки, проходить через стенку и отдаваться от стенки к холодной жидкости, будет одно и то же. Так же, как в случае плоской стенки, выразим плотности теплового потока для теплопроводности и двух процессов теплоотдачи. Выразим температурные напоры и почленно сложим уравнения:

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_l}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right). \quad (4.7)$$

Тогда линейная плотность теплового потока определяется как

$$q_l = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (4.8)$$

Обозначим выражение

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}},$$

с учетом которого уравнение (4.8) запишем как

$$q_l = k_l \pi (t_{ж1} - t_{ж2}).$$

Величина k_l называется линейным коэффициентом теплопередачи. Она характеризует интенсивность передачи тепла от одной подвижной среды к другой через разделяющую их стенку. Значение k_l численно равно количеству тепла, которое проходит через стенку трубы длиной один метр в единицу времени от одной жидкой среды к другой при разности температур между ними в один градус.

Величина $R_l = 1/k_l$, обратная коэффициенту теплопередачи, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи:

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \quad (4.9)$$

Отдельные составляющие полного термического сопротивления представляют $R_{l_1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1}$ и $R_{l_2} = \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ – линейные тепловые сопротивления теплоотдачи на соответствующих поверхностях; $R_{l_c} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ – линейное тепловое сопротивление теплопроводности стенки.

В отличие от термических сопротивлений теплоотдачи для плоской стенки здесь термические сопротивления теплоотдачи зависят не только от коэффициента теплоотдачи, но и от диаметра стенки.

Если тепловой поток через цилиндрическую стенку отнести к внутренней или наружной поверхности стенки, то получим плотность теплового потока, отнесенную к единице соответствующей поверхности трубы:

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{k_l}{d_1} (t_{ж1} - t_{ж2})$$

$$q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{k_l}{d_2} (t_{ж1} - t_{ж2}).$$

Обозначим $k_1 = \frac{k_l}{d_1}$ и $k_2 = \frac{k_l}{d_2}$, тогда $k_l = d_1 k_1 = d_2 k_2$, следовательно, $q_1 = k_1(t_{ж1} - t_{ж2})$ и $q_2 = k_2(t_{ж1} - t_{ж2})$.

Температуры поверхностей цилиндра:

$$t_{c1} = t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 d_1},$$

$$t_{c2} = t_{ж2} + \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

В случае теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку линейная плотность теплового потока определяется как

$$q_l = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}$$

или $q_l = k_l \pi(t_{ж1} - t_{ж2})$.

Величина R_l называется полным термическим сопротивлением теплопередачи многослойной цилиндрической стенки и равна:

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}.$$

Температуры стенок

$$t_{c(m+1)} = t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right).$$

Расчет теплопередачи в тонких цилиндрических стенках

На практике часто встречаются цилиндры, толщина стенок которых мала по сравнению с диаметром [9]. В этом случае при расчетах можно пользоваться упрощенными формулами. Для получения таких формул поступим следующим образом. Величину $\ln(d_2/d_1)$ разложим в ряд:

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right)^2 + \dots$$

Если отношение диаметров стремится к единице, то такой ряд становится быстросходящимся, и с достаточной точностью можно ограничиться первым членом ряда:

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2}{d_1} - 1 = \frac{d_2 - d_1}{d_2} = \frac{2\delta}{d_1},$$

где δ – толщина цилиндрической стенки.

Подставив значение $\ln(d_2/d_1)$ в уравнение (4.8), получим с учетом того, что $d_1 \approx d_2$:

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{2\lambda} \cdot \frac{2\delta}{d_1} + \frac{d_1}{\alpha_2 d_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (4.10)$$

Следовательно, если стенка трубы тонкая, то при практических расчетах можно пользоваться формулой $Q = k\pi d_x l(t_{ж1} - t_{ж2})$, где k взят согласно формуле (4.10), т.е. как для плоской стенки. При этом если $d_2/d_1 < 2$, то погрешность расчетов не превышает 4%. Для многих технических расчетов такая ошибка вполне допустима. Таким образом, для инженерных расчетов, если $d_2/d_1 < 1,8$, пользуются формулой (4.10).

Ошибку можно уменьшить, если в качестве расчетной поверхности в уравнении (4.10) брать поверхность, со стороны которой коэффициент теплоотдачи меньше: если $\alpha_1 \gg \alpha_2$, то $d_x = d_2$; если $\alpha_2 \gg \alpha_1$, то $d_x = d_1$; если $\alpha_1 \approx \alpha_2$, то $d_x = 0,5(d_1 + d_2)$.

Критический диаметр цилиндрической стенки

Рассмотрим влияние изменения наружного диаметра d_2 на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки (уравнение (4.9)). При постоянных значениях α_1 , α_2 , λ и d_1 полное термическое сопротивление теплопередачи цилиндрической стенки будет зависеть только от внешнего диаметра. При этих условиях термическое сопротивление теплоотдачи на внутренней поверхности цилиндра $R_1 = \frac{1}{\alpha_1 d_1} = \text{const}$. Термическое сопротивление

теплопроводности

$$R_{lc} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} \quad \text{с увеличением}$$

d_2 будет увеличиваться, а термическое сопротивление теплоотдачи на наружной поверхности цилиндра $R_{l_2} = \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ будет

уменьшаться. Очевидно, что полное термическое сопротивление будет определяться характером изменения термических сопротивлений теплопроводности и теплоотдачи от наружной поверхности (рис. 4.4).

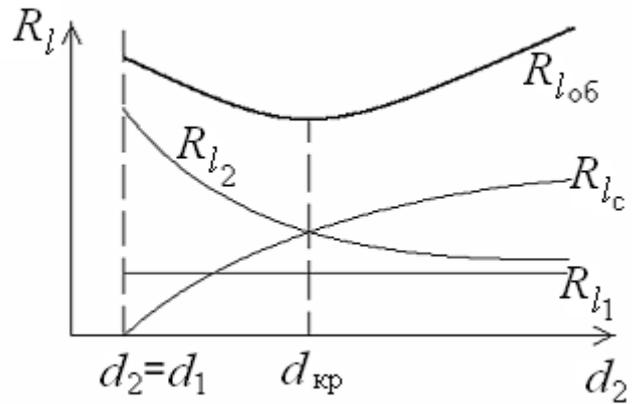


Рис. 4.4

Для того чтобы выяснить, как будет изменяться полное термическое сопротивление при увеличении толщины цилиндрической стенки, исследуем ее как функцию внешнего диаметра, для чего возьмем производную от выражения (4.9) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d(R_l)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0.$$

Значение d_2 из последнего выражения соответствует экстремуму, а именно минимуму функции. Таким образом, при значении диаметра $d_2 = 2\lambda / \alpha_2$ термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным.

Значение внешнего диаметра трубы, соответствующего минимальному полному термическому сопротивлению теплопередачи в цилиндрической стенке, называется критическим диаметром и рассчитывается по формуле

$$d_{кр} = 2\lambda / \alpha_2.$$

При $d_2 < d_{кр}$ с увеличением d_2 полное термическое сопротивление теплопередачи падает, так как увеличение наружной поверхности оказывает на термическое сопротивление большее влияние, чем увеличение толщины стенки. При $d_2 > d_{кр}$ с увеличением d_2 термическое сопротивление теплопередачи возрастает, что указывает на доминирующее влияние толщины стенки.

Изложенные соображения необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции различных цилиндрических аппаратов и трубопроводов.

Рассмотрим критический диаметр изоляции, наложенной на трубу

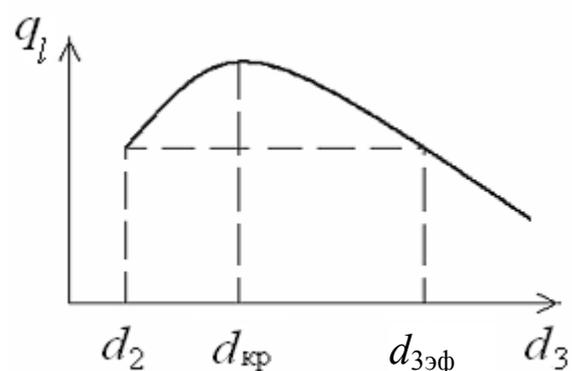


Рис. 4.5

(рис. 4.5). Термическое сопротивление теплопередачи для такой трубы

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3} .$$

Из уравнения $q_l = \pi \Delta t / R_l$ следует, что линейная плотность теплового потока при увеличении внешнего диаметра изоляции d_3 сначала будет возрастать и при достижении $d_3 = d_{кр.из}$ будет иметь максимум. При дальнейшем увеличении внешнего диаметра изоляции тепловой поток будет падать (рис. 4.5).

Выбрав какой-либо теплоизоляционный материал для покрытия цилиндрической поверхности, прежде всего нужно рассчитать критический диаметр изоляции $d_{кр.из} = 2\lambda_{из} / \alpha_2$. Если окажется, что величина $d_{кр.из}$ больше наружного диаметра трубы d_2 , то применение выбранного материала в качестве тепловой изоляции в области $d_2 < d_3 < d_{кр.из}$ приведет к тому, что при увеличении толщины изоляции будет наблюдаться увеличение потерь тепла.

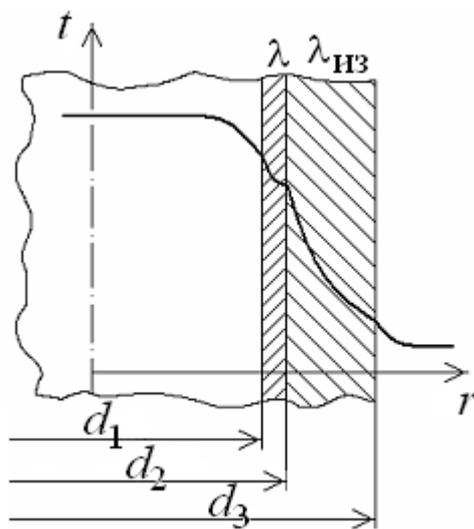


Рис. 4.6

Только при $d_3 = d_{эф}$ потери тепла вновь станут такими же, как для первоначального, неизолированного трубопровода (рис. 4.6).

Следовательно, некоторый слой тепловой изоляции не будет оправдывать своего назначения. Таким образом, для эффективной работы тепловой изоляции необходимо, чтобы $d_{кр.из} \leq d_2$.

Контрольные вопросы

1. Запишите дифференциальное уравнение теплопроводности без внутренних источников тепла для цилиндрической стенки и его решение.
2. Запишите расчетные формулы и единицы измерения следующих физических величин: линейная плотность теплового потока, линейные термические сопротивления теплоотдачи, теплопередачи и теплопроводности многослойной цилиндрической стенки, линейный коэффициент теплопередачи.
3. Запишите выражение и схематически изобразите распределение температуры в однородной и многослойной цилиндрических стенках при заданных температурах поверхностей.

4. Запишите выражение для линейной плотности теплового потока в случае многослойной цилиндрической стенки, состоящей из n однородных слоев, при заданных температурах ее поверхностей, а также в процессе теплопередачи.
5. Дайте определение и запишите выражение для эквивалентного коэффициента теплопроводности многослойной цилиндрической стенки.
6. В каком случае теплопередача в цилиндрической стенке может рассчитываться по формулам для плоской стенки? Каким образом в этом случае можно уменьшить ошибку при вычислении поверхности нагрева?
7. Запишите выражение для определения температуры в плоскости соприкосновения произвольных слоев многослойной цилиндрической стенки.
8. Дайте определение и запишите расчетную формулу для вычисления критического диаметра изоляции.
9. Поясните, в каком случае тепловой поток через цилиндрическую стенку будет возрастать при наложении изоляции.
10. В каких случаях увеличение теплового потока при наложении изоляции играет положительную роль?

Лекция 5.

Теплопроводность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников тепла

Температурное поле в цилиндрической стенке при наличии внутренних источников тепла. Теплопроводность однородного цилиндрического стержня при наличии тепловыделений. Теплопроводность цилиндрической стенки с внутренними источниками тепла: тепло отводится только через внутреннюю поверхность, тепло отводится только через наружную поверхность, тепло отводится через обе поверхности.

Температурное поле в цилиндрической стенке при наличии внутренних источников тепла

Дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат при изменении температуры только от радиуса имеет вид

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (5.1)$$

Это уравнение, как и в предыдущем случае (см. [уравнение 4.1](#)), решается введением новой переменной

$$t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2 \quad (5.2)$$

Значения постоянных интегрирования, а соответственно, зависимость температуры от радиуса будут определяться граничными условиями конкретной задачи.

Теплопроводность однородного цилиндрического стержня при наличии тепловыделений

Рассмотрим круглый цилиндр ([рис. 5.1](#)), радиус которого r_0 мал по сравнению с длиной цилиндра. При этих условиях температура будет изменяться только вдоль радиуса. Внутренние источники тепла $q_v = \text{const}$ равномерно распределены по объему тела, коэффициент теплопроводности равен λ . Заданы постоянная температура окружающей среды $t_{\text{ж}}$ и постоянный по всей поверхности коэффициент теплоотдачи α . При этих условиях температура на поверхности цилиндра одинаковая. Как и для пластины, задача будет одномерной и симметричной. Температуры на оси цилиндрического стержня t_0 и на его поверхности t_c неизвестны. Кроме этих температур, необходимо найти распределение температуры в стержне и количество тепла, отданного им в окружающую среду.

Граничные условия запишем в следующем виде:

а) условие симметрии в центре стержня: при $r = 0 \quad (dt/dr)_{r=0} = 0$;

б) теплоотдача с поверхности: при $r = r_0 \quad -\lambda \cdot (dt/dr)_{r=r_0} = \alpha \cdot (t_c - t_{\text{ж}})$.

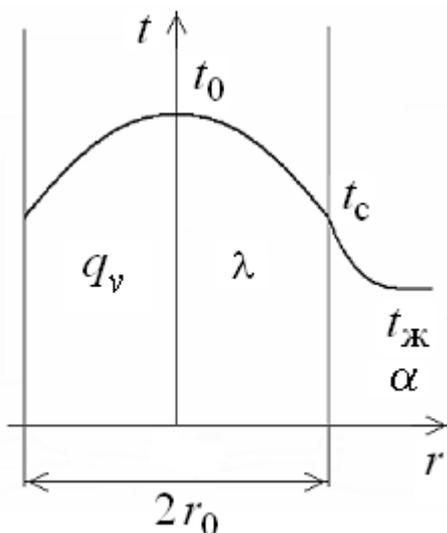


Рис. 5.1

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно определить, если в уравнение (5.2) подставить граничные условия (5.3). Тогда получаем распределение температуры внутри цилиндрического стержня:

$$t(r) = t_{\text{ж}} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2).$$

Плотность теплового потока с поверхности цилиндрического стержня

$$q = \alpha \cdot (t_c - t_{\text{ж}}) = \frac{q_v r_0}{2} \quad (5.3)$$

Теплопроводность цилиндрической стенки с внутренними источниками тепла

Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу) с внутренним диаметром d_1 и наружным диаметром d_2 (рис. 5.2) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Внутренние источники тепла $q_v = \text{const}$ равномерно распределены по объему тела. Заданы постоянные температуры подвижных сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, а также постоянные значения коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 на внутренней и наружной поверхностях трубы. Необходимо найти распределение температуры в цилиндрической стенке, температуры ее поверхностей t_{c1} и t_{c2} и тепловой поток через нее.

Будем полагать, что длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тогда потерями тепла с торцов трубы можно пренебречь. Дифференциальное уравнение (5.1) и его решение (5.2) будут теми же, изменятся граничные условия и, соответственно, постоянные интегрирования. Граничные условия будут различными для разных случаев отвода тепла.

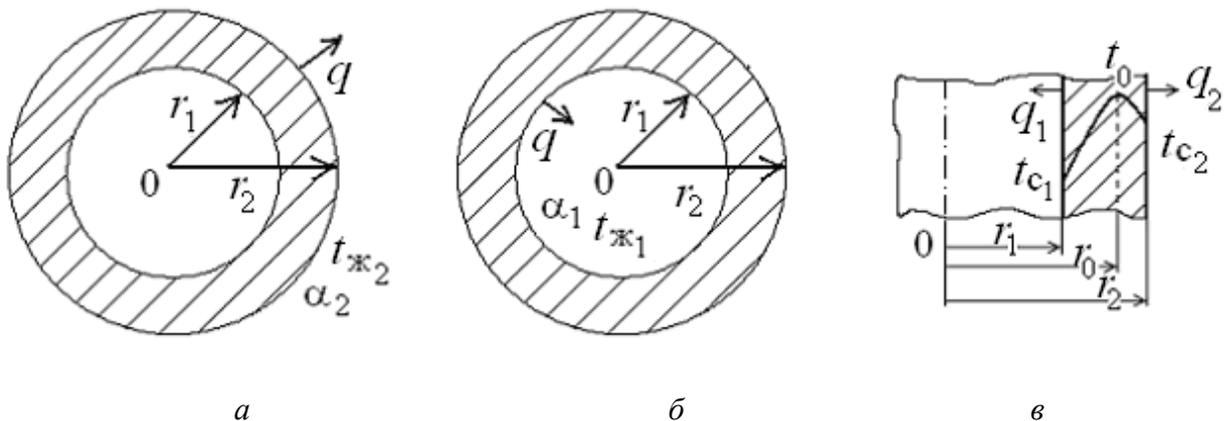


Рис. 5.2

Если тепло отводится только через наружную поверхность (рис. 5.2, а), то граничные условия будут следующими:

$$\text{при } r = r_1 \quad (dt/dr)_{r=r_1} = 0; \quad \text{при } r = r_2 \quad -\lambda \cdot (dt/dr)_{r=r_2} = \alpha_2 \cdot (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Из этих граничных условий определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 в уравнении (5.2) и получим распределение температуры в цилиндрической стенке:

$$t(r) = t_{ж2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha_2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right].$$

Температура наружной поверхности цилиндрической стенки

$$t_{c2} = t(r_2) = t_{ж2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha_2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].$$

Окончательно, с учетом температуры наружной поверхности

$$t(r) = t_{c2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (5.4)$$

Температура внутренней поверхности цилиндрической стенки

$$t_{c1} = t(r_1) = t_{c2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left(\frac{r_2}{r_2} \right)^2 \right].$$

Падение температуры в стенке определим из выражения

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left(\frac{r_2}{r_2} \right)^2 \right].$$

Удельный тепловой поток с единицы теплоотдающей поверхности

$$q = \alpha_2 \cdot (t_{c2} - t_2) = \frac{q_v \cdot r_2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].$$

Если *тепло отводится* только *через внутреннюю поверхность* (рис. 5.2, б), то граничные условия запишем следующим образом. При $r = r_2$ $(dt/dr)_{r=r_2} = 0$; при $r = r_1$ $\lambda \cdot (dt/dr)_{r=r_1} = \alpha_1 \cdot (t_{c1} - t_{ж1})$.

Аналогично предыдущему случаю из этих условий определяются соответствующие постоянные интегрирования, и после подстановки их в уравнение (5.2) получаем распределение температуры в цилиндрической стенке при отводе тепла только через внутреннюю поверхность:

$$t(r) = t_{ж1} + \frac{q_v \cdot r_1}{2\alpha_1} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right].$$

Температура внутренней поверхности

$$t_{c1} = t(r = r_1) = t_{ж1} + \frac{q_v \cdot r_1}{2\alpha_1} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right].$$

Окончательно, с учетом температуры внутренней поверхности

$$t(r) = t_{c1} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (5.5)$$

Тогда температура наружной поверхности будет определяться как

$$t_{c2} = t(r = r_2) = t_{c1} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Перепад температур в цилиндрической стенке

$$t_{c2} - t_{c1} = \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Удельный тепловой поток с единицы теплоотдающей поверхности

$$q = \alpha_1 \cdot (t_{c1} - t_{ж1}) = \frac{q_v \cdot r_1}{2} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right].$$

В случае, если *тепло отдается* окружающей среде как *с внутренней*, так и *с внешней поверхностей*, должен существовать максимум температур внутри стенки ([рис. 5.2, в](#)). Изотермическая поверхность с $r = r_0$, соответствующая максимальной температуре t_0 , разделяет цилиндрическую стенку на два слоя. Во внутреннем слое тепло передается внутрь трубы, во внешнем – наружу. Максимальное значение температуры соответствует условию $dt/dr = 0$ и, следовательно, $q = 0$. Таким образом, для решения данной задачи можно использовать уже полученные выше соотношения (5.4) и (5.5), в которых следует заменить на r_0 внутренний и наружный радиусы соответственно:

$$t^{\text{внеш}}(r) = t_{c2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right], \quad (5.6)$$

$$t^{\text{внут}}(r) = t_{c1} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (5.7)$$

Запишем максимальные перепады температур во внешнем и внутреннем слоях:

$$t_0 - t_{c2} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 - 2 \ln \frac{r_2}{r_0} - 1 \right], \quad (5.8)$$

$$t_0 - t_{c1} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_0}{r_1} - 1 \right]. \quad (5.9)$$

Вычитая, соответственно, левые и правые части двух последних уравнений, получаем выражение для перепада температур через цилиндрическую стенку, в котором единственной неизвестной величиной останется координата радиуса цилиндра, для которого тепловой поток равен нулю:

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[\left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_0}{r_2} - 2 \ln \frac{r_0}{r_1} \right].$$

Это уравнение необходимо решить относительно r_0 :

$$r_0^2 = \frac{q_v (r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{q_v \cdot 2 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (5.10)$$

Подставив вычисленное из уравнения (5.10) значение r_0 в выражение (5.8) или (5.9), найдем максимальную температуру t_0 в рассматриваемой стенке. Для определения распределения температуры во внутреннем слое в уравнение (5.7) подставляются значения текущей координаты $r_1 < r < r_0$, а для нахождения распределения температуры во внешнем слое в уравнение (5.6) подставляются значения текущей координаты $r_0 < r < r_2$.

Контрольные вопросы

1. Запишите дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии внутренних источников тепла в цилиндрической системе координат.
2. Поясните метод решения стационарного дифференциального уравнения теплопроводности с внутренними источниками тепла в цилиндрической системе координат и приведите его решение, если температура меняется только по радиусу.
3. Запишите решение дифференциального уравнения теплопроводности для однородного цилиндрического стержня.
4. Что общего и в чем отличие решения дифференциального уравнения теплопроводности при наличии тепловыделений для однородного цилиндрического стержня и для цилиндрической стенки?
5. Запишите решение дифференциального уравнения теплопроводности для однородной цилиндрической стенки, если тепло отводится только через внутреннюю поверхность; только через наружную поверхность; через обе поверхности.
6. Поясните методику определения радиуса r_0 , в котором температура цилиндрической стенки с внутренними источниками тепла максимальна, если тепло отводится через обе поверхности.
7. Могут ли быть одинаковыми значения плотности теплового потока для наружной и внутренней поверхностей цилиндрической стенки без внутренних источников тепла и при наличии в ней тепловыделений?
8. Запишите выражения для определения постоянных интегрирования в уравнении (5.2) для цилиндрического стержня и цилиндрической стенки, в которой тепло отводится только через внутреннюю поверхность, только через наружную поверхность, через обе поверхности.
9. Схематически изобразите распределение температуры в цилиндрическом стержне при наличии внутренних источников тепла, если задана температура поверхности стержня, если задана температура жидкости и условия охлаждения.
10. Схематически изобразите распределение температуры в цилиндрической стенке при наличии внутренних источников тепла, если тепло отводится только через внутреннюю поверхность, только через наружную поверхность, через обе поверхности.

Лекция 6. Интенсификация теплопередачи

Интенсификация теплопередачи за счет увеличения коэффициентов теплоотдачи. Упрощенный расчет через ребренную стенку. Интенсификация теплопередачи за счет ребрения поверхности. Виды ребристых поверхностей. Одномерное температурное поле в плоском ребре. Коэффициент эффективности ребра, коэффициент эффективности ребрения для плоской стенки. Треугольные ребра. Круглое ребро прямоугольного профиля.

Интенсификация теплопередачи за счет увеличения коэффициентов теплоотдачи

Из уравнения теплопередачи следует, что $Q = k \cdot F \cdot \Delta t$. Поэтому при заданных размерах стенки и температурах жидкостей величиной, определяющей теплопередачу, является коэффициент теплопередачи k . Так как теплопередача – явление сложное, то правильное решение можно найти только на основе анализа частных составляющих, характеризующих процесс [11, 18].

Для тонкой плоской стенки с большим коэффициентом теплопроводности коэффициент теплопередачи обратно пропорционален сумме термических сопротивлений теплоотдачи от ее поверхностей:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \approx k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Отсюда следует, что он не может быть больше самого малого из коэффициентов теплоотдачи.

Если значения коэффициентов теплоотдачи значительно отличаются друг от друга, то увеличение большего из них практически не дает увеличения коэффициента теплопередачи. Увеличение же меньшего из них в несколько раз приводит почти к такому же увеличению коэффициента теплопередачи. Пусть коэффициенты теплоотдачи равны $\alpha_1 = 40 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и $\alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, тогда коэффициент теплопередачи $k = 39,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Увеличим в два раза значение большего коэффициента теплоотдачи $\alpha_2 = 10000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, тогда $k = 39,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Увеличим в два раза значение меньшего коэффициента теплоотдачи $\alpha_1 = 80 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, сохранив первоначальное значение большего коэффициента теплоотдачи $\alpha_2 = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, тогда $k = 78,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Упрощенный расчет через оребренную стенку

При передаче тепла через цилиндрическую стенку величина линейных термических сопротивлений теплоотдачи $1/(\alpha_1 d_1)$ и $1/(\alpha_2 d_2)$ определяется не только величиной коэффициентов теплоотдачи, но и размерами самих поверхностей. Отсюда следует, что если значение коэффициента теплоотдачи мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить путем увеличения соответствующей поверхности. Например, для плоской стенки одну из ее поверхностей можно увеличить путем оребрения. Последнее обстоятельство и положено в основу интенсификации теплопередачи за счет оребрения. При этом тепловые сопротивления станут обратно пропорциональны произведению коэффициента теплоотдачи на площадь поверхности $1/(\alpha_1 F_1)$ и $1/(\alpha_2 F_2)$.

Если коэффициенты теплоотдачи различны, например, $\alpha_1 \ll \alpha_2$, то следует оребрять поверхность со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи α_1 до тех пор, пока $\alpha_1 F_1$ не достигнет значения $\alpha_2 F_2$. Дальнейшее увеличение площади поверхности с этой стороны нецелесообразно. Рассмотрим следующий пример (рис. 6.1). Дана плоская металлическая тонкая стенка, по разные стороны которой находятся жидкие среды с существенно различающимися коэффициентами теплоотдачи $\alpha_1 = 1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и $\alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Увеличим площадь одной из поверхностей за счет ее оребрения. Тогда коэффициент теплопередачи k через такую стенку будет

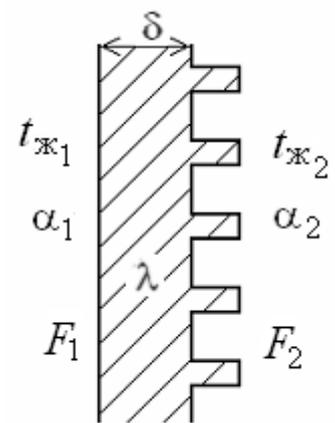


Рис. 6.1

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{F_1}{F_2}} \approx \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{F_1}{F_2}}$$

Пусть $\frac{F_1}{F_2} = 1$, тогда $k = \frac{1}{0,001 + 0,1} = \frac{10}{1,01} = 9,9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Пусть $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{5}$, тогда $k = \frac{1}{0,001 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{50}{1,05} = 48 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Пусть $\frac{F_1}{F_2} = 5$, тогда $k = \frac{1}{0,001 + 0,1 \cdot 5} = \frac{2}{1,002} \approx 2 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

В результате расчета получаем, что во втором случае коэффициент теплопередачи увеличился почти в пять раз по сравнению с гладкой стенкой, а в третьем случае – уменьшился.

Интенсификация теплопередачи за счет оребрения поверхности. Виды ребристых поверхностей

Из закона Фурье следует, что чем больше поверхность телосъема, тем большее количество теплоты пройдет через нее и рассеется в окружающей среде. Этот факт часто используется при решении вопросов охлаждения двигателей внутреннего сгорания, в холодильных установках и т. п.

Поверхность тела увеличивается с помощью ребер, например, прямых (рис 6.2, а) и кольцевых (рис. 6.2, б). В поперечном сечении ребра могут иметь профиль самой различной геометрической конфигурации (прямоугольник, круг, треугольник и другие фигуры, в том числе неправильной геометрической формы).

Ребристые поверхности изготавливаются в виде сплошных отливок или отдельных ребер, прикрепленных к поверхности. Как правило, наиболее эффективное оребрение определяется формой, размерами, стоимостью и т. п. каждой конкретной установки и выбирается индивидуально.

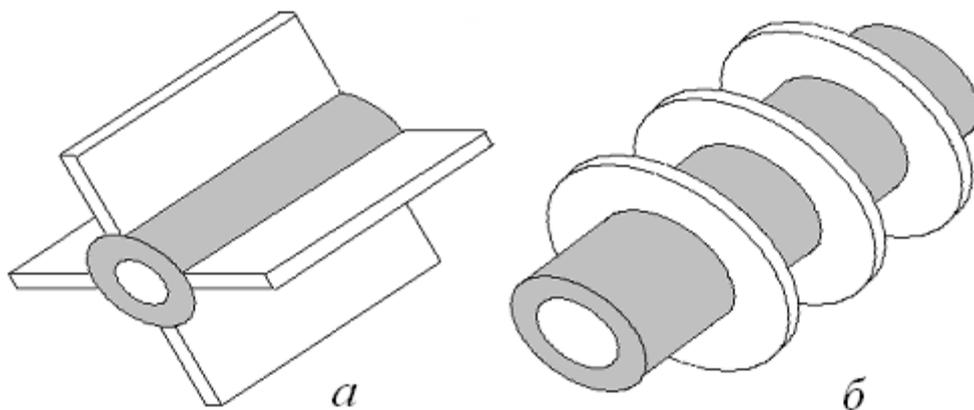


Рис. 6.2

Рассмотрим прямое ребро произвольного профиля (рис. 6.3). Будем считать, что распределение температуры по толщине ребра равномерное, т. е. температура изменяется только по координате x . В этом случае количество

теплоты, проходящее через сечение ребра, может быть подсчитано по закону

Фурье (2.1): $Q_1 = -2L\lambda f(x) \frac{dt}{dx}$, где $f(x)$ –

половина толщины ребра в сечении $a' b' c' d'$. При стационарном режиме такое же количество теплоты будет отдаваться в окружающую среду конвекцией. Если положить, что элементарная поверхность теплосъема равна $2Ldx$, то тепловые потери могут быть определены по закону Ньютона – Рихмана (2.7): $dQ_2 = 2L\alpha(t - t_0)dx$, где t_0 – температура окружающей среду ребро среды. Тогда дифференциальное уравнение, характеризующее теплообмен в прямом ребре произвольного профиля, запишем из равенства нулю суммы количеств теплоты dQ_1 и dQ_2 :

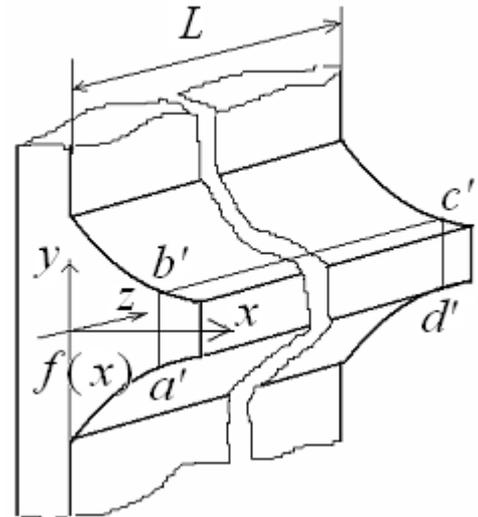


Рис. 6.3

$$-2L\lambda \cdot \frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{dt}{dx} \right] \cdot dx + 2L\alpha(t - t_0) \cdot dx = 0,$$

$$f(x) \frac{d^2t}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} \frac{dt}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda}(t - t_0) = 0. \quad (6.1)$$

Одномерное температурное поле в плоском ребре. Коэффициент эффективности ребра, коэффициент эффективности оребрения для плоской стенки

Рассмотрим распространение тепла в прямом стержне с постоянным по длине поперечным сечением (рис. 6.4). Длина ребра l , ширина b , толщина 2δ много меньше двух других размеров. Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_ж$, коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к окружающей среде α будем считать постоянным для всей поверхности. Коэффициент теплопроводности стержня λ достаточно велик, а попе-

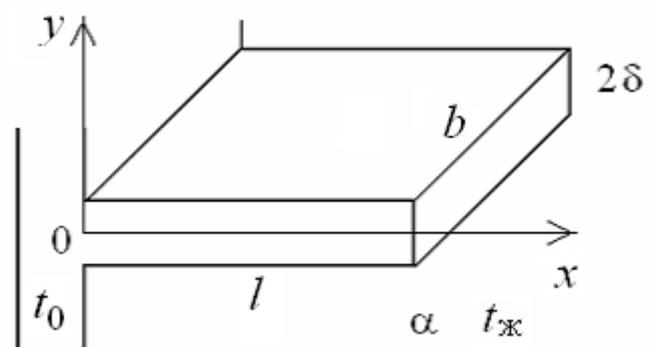


Рис. 6.4

речное сечение очень мало по сравнению с его длиной, поэтому будем пренебрегать изменением температуры по ширине стержня. Температура основания стержня t_0 . В стационарном случае, без внутренних источников тепла, с учетом $f(x) = \delta$ дифференциальное уравнение теплопроводности (6.1) записывается в следующем виде:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{\alpha}{\lambda \delta} (t - t_{ж}) = 0. \quad (6.2)$$

Обозначим $\frac{\alpha}{\lambda \delta} = m^2$ и перейдем к избыточной температуре $\vartheta = t - t_{ж}$, тогда уравнение (6.2) запишем в виде

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - m^2 \vartheta = 0. \quad (6.3)$$

Граничные условия

при $x = 0$ $\vartheta = \vartheta_0 = t_0 - t_{ж}$;

при $x = l$ $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$. (6.4)

Решением уравнения (6.3) является следующее выражение:

$$\vartheta = C_1 \exp(mx) + C_2 \exp(-mx). \quad (6.5)$$

Подставим решение (6.5) в граничные условия (6.4) и определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

при $x = 0$ $\vartheta_0 = C_1 + C_2$;

при $x = l$ $0 = C_1 m \exp(ml) - C_2 m \exp(-ml)$. (6.6)

Решение системы уравнений (6.6) дает выражения для C_1 и C_2 : $C_1 = \vartheta_0 - C_2$, $\vartheta_0 m \exp(ml) = C_2 m (\exp(ml) + \exp(-ml))$, откуда

$$C_2 = \frac{\vartheta_0 \exp(ml)}{\exp(ml) + \exp(-ml)},$$

$$C_1 = \vartheta_0 \left(1 - \frac{\exp(ml)}{\exp(ml) + \exp(-ml)} \right).$$

Тогда решение уравнения (6.3) будет следующим:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(1 - \frac{e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml}} \right) e^{mx} + \frac{\vartheta_0 e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml}} e^{-mx} = \vartheta_0 \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml}}.$$

Так как $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, то окончательно решение задачи (6.3) будет та-

ким:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(l-x)]}{\operatorname{ch}(ml)}. \quad (6.7)$$

Для конца ребра при $x = l$ получаем:

$$\vartheta_l = \vartheta_{\min} = \frac{\vartheta_0}{\operatorname{ch}(ml)}.$$

Для разных значений m и ϑ_0 получаем зависимость, представленную схематически на рис. 6.5, из которой сделаем следующие выводы. Чем меньше m , тем больше тепла будет рассеивать стержень (ребро) в окружающую среду. Наибольшее количество тепла в окружающую среду отдает идеальное ребро, для которого $m = 0$. Идеальное ребро – ребро, у которого коэффициент теплопроводности стремится к бесконечности.

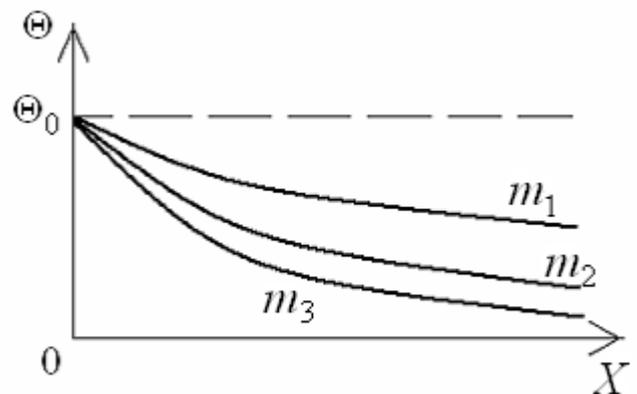


Рис. 6.5

Из представленных на рис. 6.5 случаев лучшим является ребро с $m = 1$, а худшим, соответственно, ребро с $m = 3$.

Количественная оценка потерь тепла может быть произведена на основании закона Фурье:

$$Q_p = -\lambda \cdot \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=0} \cdot f = -\lambda \cdot \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} \cdot f, \quad (6.8)$$

где $f = b \cdot 2\delta$ – площадь поперечного сечения ребра.

Из уравнения (6.7) получаем:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\vartheta_0 m \frac{\operatorname{sh}[m(l-x)]}{\operatorname{ch}(ml)}. \quad (6.9)$$

Подставив значение производной (6.9) в уравнение (6.8), при $x = 0$ получаем количество тепла, отданное ребром в окружающую среду:

$$Q_p = \vartheta_0 \cdot \lambda \cdot m \cdot \text{th}(ml) \cdot b \cdot 2\delta. \quad (6.10)$$

Для идеального ребра на основе закона Ньютона – Рихмана с учетом того, что периметр ребра $u = 2b + 4\delta$, а площадь боковой поверхности $f_1 = u \cdot l$, получаем количество отданного идеальным ребром тепла:

$$Q_p^{\text{н}} = \vartheta_0 \cdot \alpha \cdot f_1 = \vartheta_0 \cdot \alpha \cdot (2b + 4\delta) \cdot l. \quad (6.11)$$

Коэффициентом тепловой эффективности ребра называется отношение количеств тепла, отданных в окружающую среду реальным ребром и идеальным ребром:

$$E = Q_p / Q_p^{\text{н}}. \quad (6.12)$$

Подставим в (6.12) выражения (6.10) и (6.11), тогда

$$E = \frac{\vartheta_0 \cdot \lambda \cdot m \cdot \text{th}(ml) \cdot b \cdot 2\delta}{\vartheta_0 \cdot \alpha \cdot 2 \cdot (b + 2\delta) \cdot l} = \frac{\lambda \cdot m \cdot \text{th}(ml) \cdot b \cdot \delta}{\alpha \cdot (b + 2\delta) \cdot l} = \frac{m \cdot \text{th}(ml)}{\frac{\alpha}{\lambda \delta} \cdot \left(1 + \frac{2\delta}{b}\right) \cdot l}.$$

Так как $\frac{\alpha}{\lambda \delta} = m^2$, а $b \gg 2\delta$ по условию, то окончательно коэффициент тепловой эффективности ребра

$$E = \frac{\text{th}(ml)}{m \cdot l}. \quad (6.13)$$

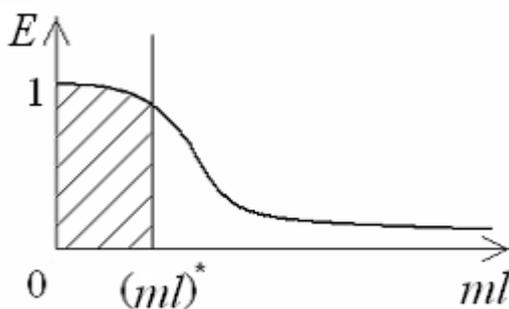


Рис. 6.6

Графически выражение (6.13) представлено на рис. 6.6. Заштрихованная область соответствует условию, что коэффициент тепловой эффективности ребра стремится к единице. Это условие определяет эффективную длину ребра в зависимости от величины m . Чем больше m , тем короче должно быть ребро, чтобы теплоотдача в окружающую среду была близка к идеальной.

Перечислим основные требования к ребристым поверхностям:

1. Ребра целесообразно выполнять из материала с высоким коэффициентом теплопроводности (медь, алюминий, латунь).
2. Ребра целесообразно выполнять на той поверхности, где коэффициент теплоотдачи минимальный, например, со стороны воздуха, а не воды. Определяющим критерием является коэффициент теплоотдачи, а не величина температуры.
3. Нецелесообразно делать ребра большой длины (высоты).
4. Необходимо ребристую поверхность поддерживать в чистоте.

Треугольные ребра

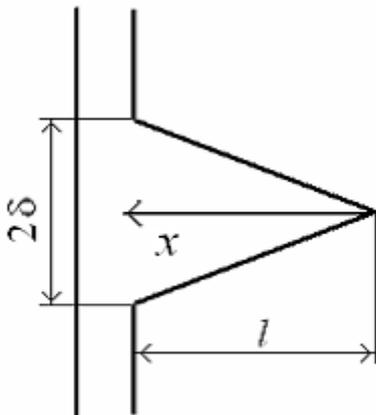


Рис. 6.7

Для ребра этой формы (рис. 6.7) $f(x) = (x/l)\delta$. Значит, уравнение (6.1), записанное для избыточной температуры, будет таким:

$$x \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{d\vartheta}{dx} - m^2 l \vartheta = 0. \quad (6.14)$$

Дифференциальное уравнение (6.14) представляет собой одну из форм модифицированного уравнения Бесселя. Его общим решением может служить функция вида

$$\vartheta = C_1 I_0(2m\sqrt{lx}) + C_2 K_0(2m\sqrt{lx}),$$

где $I_0(2m\sqrt{lx})$ и $K_0(2m\sqrt{lx})$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка, I и II рода, аргумента $2m\sqrt{lx}$ [15].

Тогда, применяя граничные условия (6.4), как и для предыдущей задачи, получаем:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{I_0(2m\sqrt{lx})}{I_0(2ml)}.$$

Полный тепловой поток, проходящий через ребро треугольного профиля, вычисляется по формуле

$$Q = 2L\alpha \int_0^l \vartheta dx = \frac{2L\alpha\vartheta_0}{I_0(2ml)} \int_0^l I_0(2m\sqrt{lx}) dx = \frac{2L\alpha\vartheta_0}{mI_0(2ml)} I_1(2ml), \quad (6.15)$$

где $I_1(2ml)$ – модифицированная функция Бесселя I рода, первого порядка, а для вычисления интеграла использовалась рекуррентная формула $\int zI_0(z) dz = zI_1(z)$.

Эффективность ребра треугольного профиля

$$E = \frac{I_1(2ml)}{ml \cdot I_0(2ml)}.$$

При одинаковых коэффициентах теплоотдачи, теплопроводности, толщине и высоте прямоугольное ребро эффективнее ребра треугольного профиля. Однако следует иметь в виду, что треугольное ребро при одинаковых с прямоугольным высоте и толщине основания менее металлоемко, а, следовательно, и дешевле. При подходе к эффективности ребра с этой точки зрения треугольному ребру следует отдавать предпочтение.

Круглое ребро прямоугольного профиля

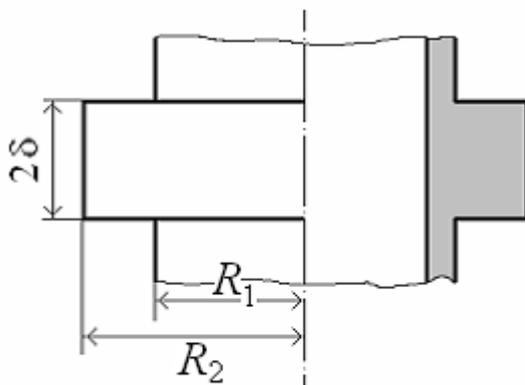


Рис. 6.8

Для круглого ребра прямоугольной формы (рис. 6.8) закон Фурье следует записать для цилиндрической системы координат. Тогда, повторив рассуждения как для прямого ребра прямоугольного профиля, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \vartheta}{dr} - m^2 \vartheta = 0.$$

Данное дифференциальное уравнение также представляет собой одну из форм модифицированного уравнения Бесселя, общим решением для которого служит функция вида

$$\vartheta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr).$$

Постоянные интегрирования находим из тех же граничных условий, как для прямых ребер, тогда:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{I_0(mr)K_1(mR_2) + I_1(mR_2)K_0(mr)}{I_0(mR_1)K_1(mR_2) + I_1(mR_2)K_0(mR_1)}$$

Рассеянный с поверхности кольцевого ребра тепловой поток также определяется по закону Ньютона – Рихмана и здесь будет иметь вид

$$Q = 4\pi\alpha \int_{R_1}^{R_2} r\vartheta dr = \frac{4\pi\alpha R_1\vartheta_0}{m} \frac{I_1(mR_2)K_1(mR_1) - I_1(mR_1)K_1(mR_2)}{I_0(mR_1)K_1(mR_2) + I_1(mR_2)K_0(mR_1)}$$

Тепловой поток, рассеиваемый с поверхности кольцевого ребра, когда температура его всюду равна температуре основания (идеальное ребро), подсчитывается по формуле $Q_p^n = \vartheta_0 \cdot 2\pi\alpha \cdot (R_2^2 - R_1^2)$, тогда эффективность кольцевого ребра прямоугольного профиля

$$E = \frac{2R_1}{m(R_2^2 - R_1^2)} \frac{I_1(mR_2)K_1(mR_1) - I_1(mR_1)K_1(mR_2)}{I_0(mR_1)K_1(mR_2) + I_1(mR_2)K_0(mR_1)}$$

Уменьшение параметра mR_1 (что равносильно увеличению теплопроводности, толщины ребра, уменьшению радиуса трубы и коэффициента теплоотдачи) влечет за собой увеличение эффективности.

Контрольные вопросы

1. Перечислите способы интенсификации теплопередачи.
2. Может ли коэффициент теплопередачи быть больше какого-либо из коэффициентов теплоотдачи?
3. Почему нецелесообразно оребрять стенку со стороны большего коэффициента теплоотдачи?
4. Перечислите формы ребер и их профили, способы крепления.
5. Запишите дифференциальное уравнение теплопроводности в прямом ребре произвольного профиля.
6. Дайте определение идеального ребра, коэффициента тепловой эффективности ребра.
7. Перечислите требования, предъявляемые к ребристым поверхностям.
8. Запишите выражения для количества теплоты, переданного ребрами окружающей среде в зависимости от их формы и профиля.
9. Запишите выражение для коэффициента тепловой эффективности ребра в зависимости от их формы и профиля.
10. Ребра какой формы и профиля экономически более эффективны?

Лекция 7.

Нестационарная теплопроводность.

Аналитическое описание задач теплопроводности.

Бесконечная тонкая пластина

Аналитическое описание процесса. Основные понятия метода нестационарной теплопроводности: безразмерная избыточная температура, критерий Био, критерий Фурье. Нестационарное температурное поле в плоской пластине – решение задачи в безразмерном виде методом разделения переменных. Анализ решения. Зависимость поля температур от числа Фурье. Номограммы. Особенности пересечения касательных к решению на поверхности пластины. Зависимость поля температур бесконечной пластины от числа Био.

Аналитическое описание процесса

Рассмотрим перенос тепла за счет теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени. Такие процессы теплопроводности называют нестационарными. Они имеют место при нагревании (охлаждении) различных заготовок и изделий, при производстве стекла, обжиге кирпича, вулканизации резины, пуске и остановке различных теплообменных устройств, энергетических агрегатов и т.д.

Среди практических задач нестационарной теплопроводности важнейшее значение имеют две группы процессов: а) тело стремится к тепловому равновесию; б) температура тела претерпевает периодические изменения [5].

К первой группе относятся процессы прогрева или охлаждения тел, помещенных в среду с заданным тепловым состоянием, например, прогрев болванки в печи, в металлургии охлаждение брусков и чушек, охлаждение закаливаемой детали и т.д.

Ко второй группе относятся процессы в периодически действующих подогревателях, например, тепловой процесс регенераторов, кладка которых периодически то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом.

При нагревании однородного твердого тела в среде с постоянной температурой по мере нагрева температура в каждой точке приближается к температуре нагревающей среды (рис. 7.1). Наиболее быстро изменяется температура точек, лежащих вблизи поверхности тела. С увеличением времени прогрева эта разность будет уменьшаться и теоретически через достаточно большой отрезок времени она будет равна нулю.

В условиях передачи тепла через стенку при внезапном изменении температуры одного из теплоносителей не все тепло будет передаваться через стенку, часть его уйдет на изменение внутренней энергии самой стенки (ее температуры) и только при наступлении стационарного процесса все тепло будет передаваться через стенку от одной жидкости к другой. Приведенные примеры указывают на то, что нестационарные тепловые процессы всегда связаны с изменением внутренней энергии или энтальпии вещества.

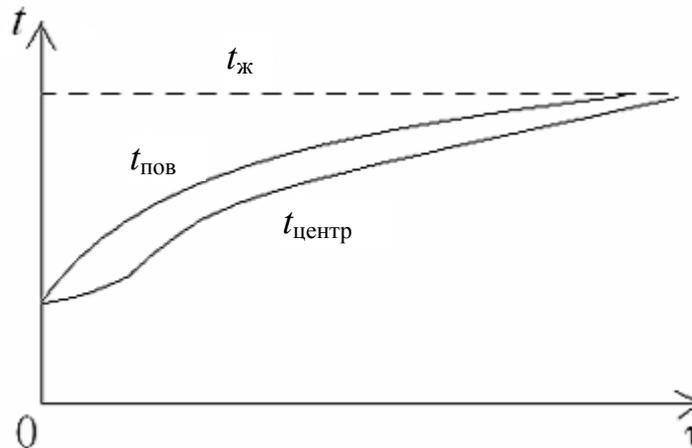


Рис. 7.1

Аналитическое описание процесса теплопроводности включает в себя дифференциальное уравнение и условия однозначности.

Запишем дифференциальное уравнение теплопроводности для избыточной температуры при отсутствии внутренних источников тепла:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \nabla^2 \vartheta. \quad (7.1)$$

Условия однозначности задаются в виде

- 1) физических параметров λ, c, ρ ;
- 2) формы и геометрических размеров объекта $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$;
- 3) температуры тела в начальный момент времени $\tau = 0 \quad t = t_0 = f(x, y, z)$;
- 4) граничных условий, например, третьего рода $\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{n=0}$.

**Основные понятия нестационарной теплопроводности:
безразмерная избыточная температура,
критерий Био, критерий Фурье**

При решении задач нестационарной теплопроводности принято вести расчет избыточной температуры от температуры среды $t_{ж}$. Если t_0 – температура тела в начальный момент времени, а t – текущая температура тела в произвольный момент времени, то текущий температурный напор (избыточ-

ная температура) определяется как $\vartheta = t - t_{ж}$, если $t > t_{ж}$, или $\vartheta = t_{ж} - t$, если $t < t_{ж}$. Начальный температурный напор, определяемый как $\vartheta_0 = t_0 - t_{ж}$ или $\vartheta_0 = t_{ж} - t_0$, всегда максимален, с течением времени текущий температурный напор уменьшается от максимального (начального) до нулевого значения при наступлении теплового равновесия.

Безразмерная избыточная температура равна отношению текущего температурного напора к максимальному (начальному) температурному напору:

$$\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}.$$

С течением времени безразмерная избыточная температура уменьшается от единицы до нуля как в процессах нагревания, так и в процессах охлаждения тел.

Критериальное число Био равно отношению термического сопротивления теплопроводности в твердом теле к термическому сопротивлению теплоотдачи между его поверхностью и охлаждающей (нагревающей) жидкостью, характеризует связь между полем температур в твердом теле и условиями теплоотдачи на его поверхности:

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha}.$$

Критерий Фурье, или безразмерное время, характеризует скорость изменения температуры в теле:

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\tau}{\delta^2 / a}.$$

Нестационарное температурное поле в плоской пластине – решение задачи в безразмерном виде методом разделения переменных

Задана тонкая пластина толщиной 2δ (рис. 7.2). В начальный момент ($\tau = 0$) температура в пластине распределена равномерно и равна $t = t_0 = \text{const}$. Охлаждение происходит в среде с постоянной температурой $t_{ж} = \text{const}$. На обеих поверхностях отвод тепла осуществляется при одинаковом коэффициенте теплоотдачи ($\alpha = \text{const}$) во всем промежутке времени. Отсчет температуры пластины для любого времени будем вести от температуры окружающей среды, т.е. для температурного напора $t - t_{ж} = \vartheta$. Изменение

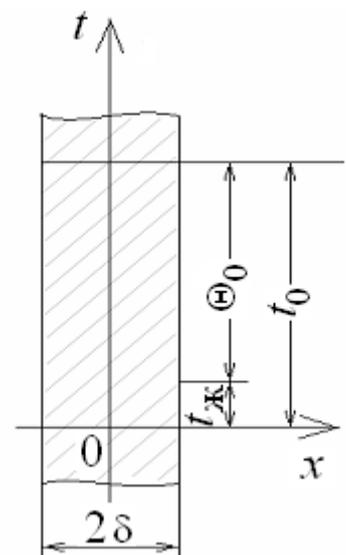


Рис. 7.2

температуры будет происходить только в направлении оси Ox , поэтому дифференциальное уравнение (7.1) для избыточной температуры примет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (7.2)$$

Начальные условия:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_0 - t_{ж}. \quad (7.3)$$

Граничные условия из-за симметрии задачи запишем только для одной половины пластины:

$$\text{при } x = 0 \quad (\partial \vartheta / \partial x)_{x=0} = 0 \quad (\text{отсутствие теплового потока}); \quad (7.4)$$

$$\text{при } x = \delta \quad (\partial \vartheta / \partial x)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta} \quad (\text{теплоотдача с поверхности}).$$

Решение уравнения (7.2) совместно с условиями (7.3) и (7.4) даст искомую температуру. Так как в уравнении (7.2) равны друг другу производные по разным переменным, то будем искать решение в виде произведения двух функций: $\vartheta = f(x, \tau) = \psi(x) \cdot \varphi(\tau)$. После подстановки и разделения переменных получаем два уравнения:

$$\varphi'(\tau) + ak^2\varphi(\tau) = 0,$$

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0,$$

которые легко интегрируются:

$$\varphi(\tau) = C_1 \exp(-ak^2\tau),$$

$$\psi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx).$$

Общее решение уравнения (7.2):

$$\vartheta(x, \tau) = [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)] \cdot C_1 \exp(-ak^2\tau). \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) удовлетворяет исходному уравнению (7.2) при любых значениях C_1 , C_2 , C_3 и k , которые следует определить из начальных и граничных условий (7.3) и (7.4).

Подставляя граничные условия (7.4) и решая характеристическое уравнение (например, графически)

$$\text{ctg}(\mu) = \mu / \text{Bi}, \quad (7.6)$$

где обозначим $k\delta = \mu$, получим систему уравнений, в которой каждому найденному значению корня μ будет соответствовать свое частное распределение температуры:

$$\vartheta_1 = A_1 \cdot \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\mu_1^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right);$$

$$\vartheta_2 = A_2 \cdot \cos\left(\mu_2 \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\mu_2^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right);$$

...

$$\vartheta_n = A_n \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right).$$

Каждое решение удовлетворяет дифференциальному уравнению (7.2) при любых значениях постоянных A_1, A_2, \dots, A_n , но ни одно из этих решений не будет соответствовать действительному распределению температуры в начальный момент времени. Однако путем наложения бесконечного числа таких распределений при соответствующем выборе величин A_n можно воспроизвести любую действительную температурную кривую в начальный момент времени.

На основании сказанного общее решение можно представить суммой бесконечного ряда:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right).$$

Постоянную A_n определим из начальных условий (7.3), применив разложение четной функции в ряд Фурье:

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \quad (7.7)$$

Из уравнения (7.7) следует, что A_n является только функцией корней характеристического уравнения, которые, в свою очередь, являются функцией критерия Био.

Окончательно выражение для температурного поля при охлаждении плоской пластины, позволяющее получить значение температуры в любой точке пластины для любого момента времени, будет иметь вид

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_0 2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right).$$

Придадим уравнению (7.7) безразмерную форму ($X = x/\delta$ – безразмерная координата):

$$\Theta = \frac{t - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (7.8)$$

Анализ решения. Зависимость решения от числа Фурье. Номограммы

Корни характеристического уравнения (7.6) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ представляют собой ряд возрастающих чисел, поэтому чем больше μ , тем меньше роль последующего члена ряда по сравнению с предыдущим. Кроме того, чем больше критерий Фурье, тем члены ряда будут убывать быстрее с увеличением номера μ_n .

Многочисленные исследования показали, что если число Фурье превышает 0,3, то ряд становится настолько быстросходящимся, что распределение температуры достаточно точно описывается первым членом ряда:

$$\Theta = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (7.9)$$

Обозначим $D_1 = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1}$. Эта величина является только функ-

цией критерия Био и может быть заранее рассчитана и табулирована. Кроме того, если рассматривать температуру для определенных значений безразмерной координаты, например, для центра и поверхности пластины ($X = 0$ и $X = 1$, соответственно), то второй множитель уравнения (7.9) тоже зависит только от числа Bi , поэтому решение может быть представлено в виде

$$\Theta_{ц} = N(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (7.10)$$

$$\Theta_{п} = P(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (7.11)$$

Функции $N(Bi)$ и $P(Bi)$ заранее рассчитаны и представлены в таблицах в зависимости от числа Bi , а безразмерные избыточные температуры для центра и поверхности пластины построены в виде номограмм. Для этого не-

обходимо прологарифмировать уравнения (7.10) и (7.11), тогда они будут представлять собой семейство прямых линий:

$$\ln(\Theta)_{X=0} = \ln N(\text{Bi}) - \mu_1^2 \text{Fo} ;$$

$$\ln(\Theta)_{X=1} = \ln P(\text{Bi}) - \mu_1^2 \text{Fo} .$$

Особенности пересечения касательных к решению на поверхности пластины

Из уравнения (7.8) следует, что при охлаждении (нагревании) пластины, для любого момента времени после начального, распределение температуры имеет вид симметричной кривой с максимумом на оси пластины ($X = 0$). Для каждого последующего момента времени будет своя кривая, монотонно убывающая к поверхности пластины. При этом, для любого момента времени, продолжения касательных к кривым в точках поверхности ($X = \pm 1$) проходят через две направляющие точки $+A$ и $-A$, расположенные на расстоянии $\pm X_0$ от поверхности пластины, равном $X_0 = \pm 1 / \text{Bi}$ (рис. 7.3).

Для доказательства этого важного свойства рассмотрим температурное поле для произвольного момента времени $\text{Fo} > 0$.

Умножив граничное условие (7.4) при $x = \pm\delta$ на δ / ϑ_0 , получим:

$$\left[\frac{\partial(\vartheta / \vartheta_0)}{\partial(x / \delta)} \right]_{x=\delta} = -\frac{\alpha \delta}{\lambda} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)_{x=\delta} .$$

В безразмерных переменных будем иметь: $(\partial\Theta / \partial X)_{X=1} = -\text{Bi}\Theta_{X=1}$.

Из рис. 7.3 следует, что $-(\partial\Theta / \partial X)_{X=1} = \Theta_{X=1} / X_0 = \text{tg}\varphi$.

Тогда получаем $\frac{1}{X_0} = \text{Bi}$ в безраз-

мерном виде или $x_0 = \frac{\lambda}{\alpha}$ в раз-

мерном виде. Следовательно, касательные ко всем температурным кривым в точке пересечения с поверхностью пластины при неиз-

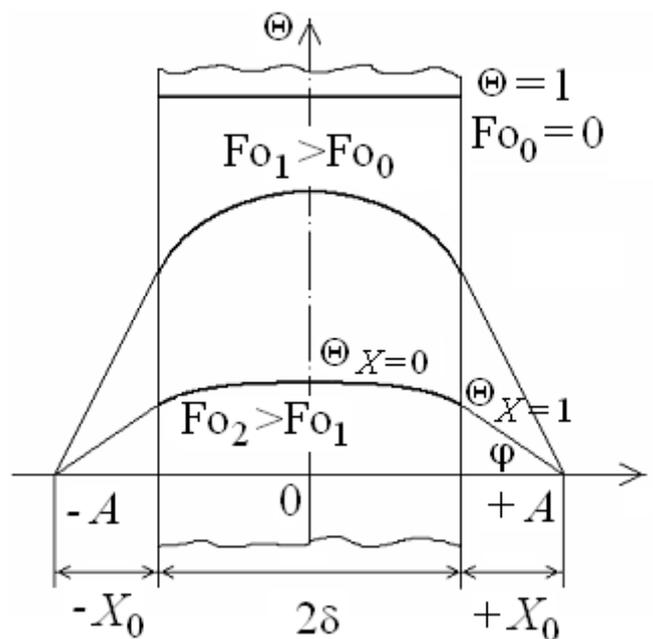


Рис. 7.3

менных граничных условиях всегда будут проходить через точку A . Сказанное справедливо не только для пластины, но и для цилиндра, шара и т. д.

Зависимость поля температур бесконечной пластины от числа Био

Доказанное свойство температурных кривых дает возможность определить характер изменения температуры в теле при заданном значении критерия Био. Рассмотрим три случая.

1. Критерий Био стремится к бесконечности (практически $Bi > 100$). В этом случае температура поверхности пластины сразу становится равной температуре окружающей среды, в которую помещена пластина. Этот вывод следует из уравнения $X_0 = 1/Bi = 0$, что означает пересечение касательных на поверхности пластины. Из определения числа Био получаем, что этот режим реализуется при хороших условиях охлаждения пластины (большой интенсивности отвода тепла от поверхности), т. е. коэффициенте теплоотдачи, стремящемся к бесконечности. В этих условиях процесс охлаждения определяется только физическими свойствами и размерами тела и не зависит от условий охлаждения на поверхности. При этом $\mu_n = (2n - 1) \cdot \pi / 2$, тогда коэффициент ряда, описываемый уравнением (7.8),

$$D_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Общее решение для рассматриваемого случая принимает вид

$$\Theta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos \left[\frac{2n-1}{2} \pi X \right] \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right]. \quad (7.12)$$

Температура на оси пластины ($X = 0$):

$$\Theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right].$$

Температура на поверхности пластины должна быть равна нулю, что подтверждается уравнением (7.12) при $X = 1$.

Распределение температуры в пластине при $Fo > 0$ показано на рис. 7.4, а, здесь $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < \dots < Fo_n$. При $Fo > 0,3$ ряд (7.12) быстро

сходится и ошибка не превышает 1%, если отбросить все члены ряда, кроме первого. Тогда распределение температуры на оси пластины принимает вид

$$\Theta_{x=0} = \frac{4}{\pi} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo\right]. \quad (7.13)$$

Если уравнение (7.13) прологарифмировать и разрешить относительно критерия Фурье, то получаем: $Fo = \frac{4}{\pi^2} \ln\left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\Theta_{x=0}}\right)$. Выражаем из числа Фурье время, необходимое для прогрева середины пластины до заданной температуры:

$$\tau = \left(\frac{2\delta}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\Theta_{x=0}}\right).$$

2. Критерий Био стремится к нулю (практически $Bi < 0,1$). В этом случае все коэффициенты членов ряда $D_n \rightarrow 0$, поскольку $\mu_n = (n-1)\pi$, кроме

$$D_1 = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \approx \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_1 \cdot 1} = 1.$$

Из определения числа Био видно, что этот режим реализуется при малых размерах толщины пластины, при больших значениях коэффициента теплопроводности, при малых значениях коэффициента теплоотдачи.

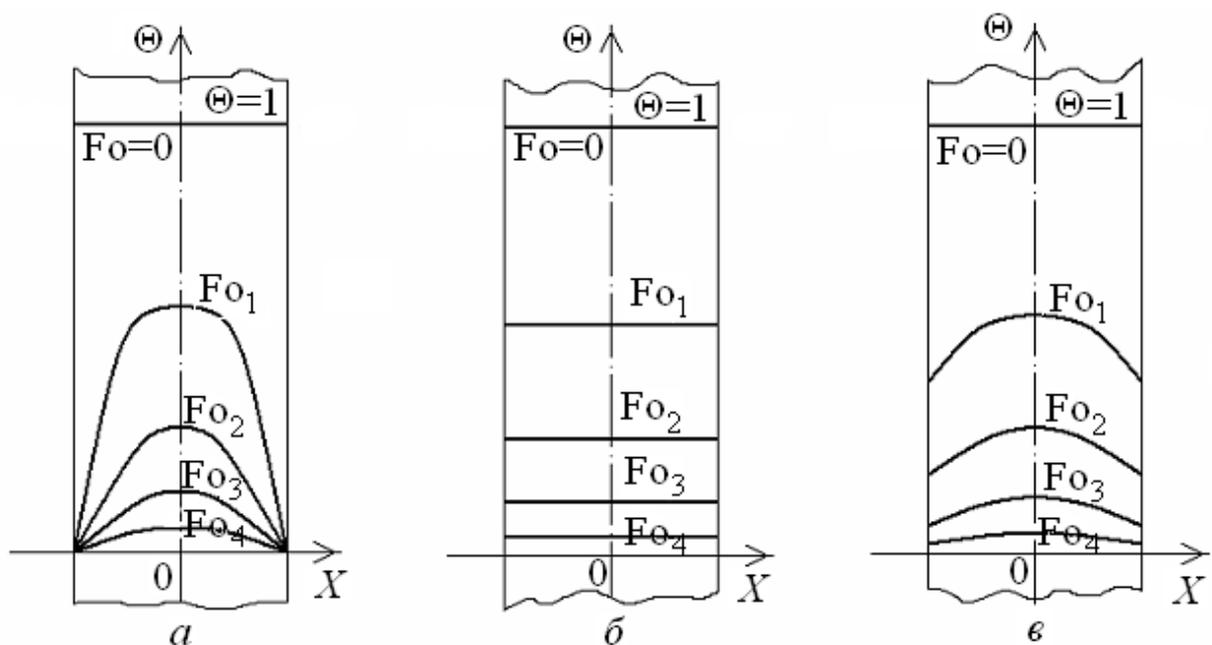


Рис. 7.4

В характеристическом уравнении, как и в коэффициенте D_1 , функцию $\operatorname{tg}\mu_1$ можно заменить через ее аргумент, тогда $1/\mu_1 = \mu_1/Bi$. В этом случае уравнение (7.8) принимает вид

$$\Theta = \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo) = \cos(\sqrt{Bi} \cdot X) \exp(-Bi \cdot Fo) .$$

Найдем температуру на оси и на поверхности пластины:

при $X = 0$ $\Theta_{X=0} = \exp(-Bi \cdot Fo) ;$

при $X = 1$ $\Theta_{X=1} = \cos(\sqrt{Bi}) \exp(-Bi \cdot Fo) .$

Отношение температур на оси и на поверхности пластины:

$$\frac{\Theta_{X=0}}{\Theta_{X=1}} = \frac{\exp(-Bi \cdot Fo)}{\cos(\sqrt{Bi}) \exp(-Bi \cdot Fo)} \rightarrow 1 .$$

При малых Bi температура на поверхности пластины мало чем отличается от температуры на ее оси. Это указывает на то, что температура по толщине пластины распределяется равномерно и кривая температур остается почти параллельной оси Ox для любого момента времени (рис. 7.4, б). Касательные к температурным кривым в точках пересечения с поверхностью должны пересекаться с осью абсцисс в бесконечности: при $Bi \rightarrow 0$ $X_0 = 1/Bi \rightarrow \infty$.

В рассматриваемом случае скорость нагрева и охлаждения тела зависит только от интенсивности теплоотдачи. Иначе говоря, процесс выравнивания температуры в теле происходит существенно интенсивнее, чем отвод тепла с поверхности. Задача становится внешней.

3. Критерий Био находится в интервале $0,1 \leq Bi \leq 100$. В рассматриваемом случае μ_n есть функция Bi , т.е. зависит от толщины пластины. Температурные кривые для любого момента времени будут выглядеть так, как показано на рис. 7.4, в. В этом случае интенсивность процесса охлаждения (нагрева) определяется как внутренним, так и внешним термическими сопротивлениями.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры периодических нестационарных процессов теплопроводности.
2. Приведите примеры и охарактеризуйте особенности процесса нестационарной теплопроводности при стремлении тела к тепловому равновесию.
3. Запишите дифференциальное уравнение нестационарного процесса теплопроводности без внутренних источников тепла.
4. Поясните метод решения нестационарного уравнения теплопроводности для пластины.
5. Дайте определение критериев Био и Фурье, поясните их физический смысл.
6. Что такое безразмерная избыточная температура?
7. Запишите решение дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в безразмерном виде, поясните его структуру.
8. Охарактеризуйте особенности решения дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в зависимости от числа Фурье.
9. Поясните особенности точки пересечения касательных к решению нестационарного уравнения теплопроводности на поверхности пластины. Как они зависят от числа Био?
10. Как определить время, необходимое для прогрева середины пластины до заданной температуры в случае $Fo > 0,3$?
11. В каком случае можно определить температуру центра или поверхности пластины при помощи номограмм?
12. Поясните методику решения характеристического уравнения $ctg(\mu) = \mu / Bi$, а также особенности его решения в зависимости от числа Bi .
13. Охарактеризуйте зависимость температурного поля в телах различной формы от величины числа Био.
14. Схематически изобразите распределение избыточной температуры для бесконечной пластины в зависимости от диапазона значений числа Био.

Лекция 8.

Бесконечный цилиндр, шар.

Определение количества теплоты тела конечных размеров

Нестационарное температурное поле в сплошном бесконечном цилиндре, в шаре. Анализ решения. Средняя безразмерная избыточная температура, средняя по сечению температура, определение количества теплоты, отданного (полученного) телом в процессе охлаждения (нагревания). Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров (параллелепипед, балка прямоугольного сечения, цилиндр конечной длины) – метод перемножения решений.

Нестационарное температурное поле в сплошном бесконечном цилиндре, в шаре. Анализ решения

Рассмотрим цилиндр радиусом r_0 , который отдает тепло окружающей среде через боковую поверхность (рис. 8.1). Коэффициент теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ неизменен на протяжении всего периода охлаждения. Температура среды $t_{\text{ж}} = \text{const}$ постоянна. В начальный момент ($\tau = 0$) температура во всех точках цилиндра одинакова. При этих условиях уравнение теплопроводности, записанное для температурного напора, принимает вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right).$$

Начальные и граничные условия:

при $\tau = 0$ и $0 \leq r \leq r_0$ $\vartheta = \vartheta_0 = t_0 - t_{\text{ж}}$;

при $r = 0$ $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$;

при $r = r_0$ $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{r=r_0}$.

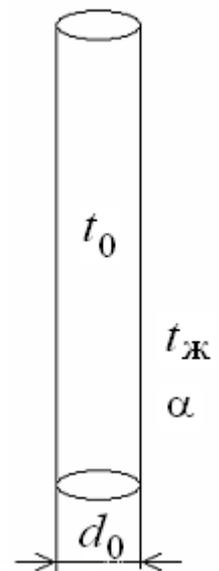


Рис. 8.1

Задача аналогична предыдущей (для пластины) и может быть решена методом разделения переменных. В безразмерной форме значение температуры в любой точке цилиндра для любого момента времени будет иметь вид

$$\Theta = \frac{t - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} J_0(\mu_n R) \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (8.1)$$

Здесь $R = r/r_0$ – безразмерная координата; $Fo = at/r_0^2$ – число Фурье; $J_0(\mu_n)$, $J_0(\mu_n R)$ и $J_1(\mu_n)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка от действительного аргумента; μ_n – корни характеристического уравнения

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi},$$

где $Bi = \alpha \cdot r_0 / \lambda$ – число Био.

Как и для пластины, для цилиндра имеем бесконечное множество корней характеристического уравнения μ_n . Как и для пластины, решение можно записать для выделенных точек цилиндра – его оси и поверхности.

Температуру на оси цилиндра определим, взяв $R = 0$:

$$\Theta_{\text{ц}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

Температуру на поверхности цилиндра определим, взяв $R = 1$:

$$\Theta_{\text{п}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)J_0(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

При $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$) прямая совпадает с осью абсцисс и корни характеристического уравнения не зависят от числа Био, а определяются из условий $J_0(\mu) = 0$. В этом случае процесс охлаждения не зависит от условий охлаждения на поверхности цилиндра, а определяется только физическими свойствами тела и его геометрическими размерами. Температура на поверхности цилиндра в любой момент времени, кроме начального, равна температуре окружающей среды. При этом уравнение для безразмерной избыточной температуры принимает вид

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

Если рассматривать охлаждение цилиндра при условии $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$), то при разложении функций $J_0(\mu)$ и $J_1(\mu)$ в степенные ряды они становятся настолько быстросходящимися, что можно ограничиться первыми членами ряда, и тогда $\mu^2 = 2Bi$. Кроме того, коэффициенты всех членов ряда бесконечной суммы равны нулю, кроме первого, который равен единице, тогда безразмерная избыточная температура

$$\Theta = J_0(\mu_1 r / r_0) \exp(-\mu_1^2 Fo) .$$

На оси цилиндра ($R = 0$) $\Theta_{\text{ц}} = \exp(-\mu_1^2 Fo)$, и на поверхности цилиндра ($R = 1$)

$$\Theta_{\text{п}} = J_0(\mu_1) \exp(-\mu_1^2 Fo) .$$

Так как $\mu = \sqrt{2Bi} \rightarrow 0$, то $J_1(\mu) \rightarrow 1$, и отношение температур на оси и поверхности цилиндра тоже стремится к единице. Следовательно, температура распределена равномерно и не зависит от радиуса цилиндра. Задача становится внешней, и протекание процесса определяется условиями охлаждения на поверхности цилиндра.

Если число Фурье превышает 0,25, то ряд становится настолько быстросходящимся, что ошибка не превышает 1%, если распределение температуры ограничить первым членом ряда:

$$\Theta = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1 [J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]} J_0(\mu_1 R) \exp(-\mu_1^2 Fo) .$$

Для центра и поверхности цилиндра ($R = 0$ и $R = 1$ соответственно) два первых множителя зависят только от числа Bi , поэтому решение может быть представлено в виде

$$\Theta_{\text{ц}} = N_0(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo) ,$$

$$\Theta_{\text{п}} = P_0(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo) .$$

Функции $N_0(Bi)$ и $P_0(Bi)$ могут быть рассчитаны заранее и представлены в таблицах в зависимости от числа Bi , а безразмерные избыточные температуры для центра и поверхности цилиндра построены в виде номограмм.

Рассмотрим шар, радиус которого r_0 . На поверхности шара заданы граничные условия третьего рода: коэффициент теплоотдачи $\alpha = \text{const}$, постоян-

ный для всей поверхности шара, В начальный момент времени $\tau = 0$ температура шара одинакова во всех точках и равна t_0 . Температура окружающей среды $t_{ж} = \text{const}$.

При этих условиях уравнение теплопроводности, записанное для температурного напора, принимает вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right).$$

Начальные и граничные условия:

При $\tau = 0$ и $0 \leq r \leq r_0$ $\vartheta = \vartheta_0 = t_0 - t_{ж}$.

При $r = 0$ $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$; при $r = r_0$ $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{r=r_0}$.

Как и в предыдущих случаях, при рассмотрении пластины и цилиндра задача может быть решена методом разделения переменных. Не приводя вычислений, ограничимся конечным результатом:

$$\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} \frac{\sin(\mu_n r / r_0)}{\mu_n r / r_0} \exp(-\mu_n^2 Fo),$$

где μ_n – корни характеристического уравнения

$$\text{tg}(\mu) = -\mu / (\text{Bi} - 1). \quad (8.2)$$

При $\text{Bi} \rightarrow \infty$ ($\text{Bi} > 100$) $\mu_i = i\pi$, при этом уравнение для безразмерной избыточной температуры принимает вид

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{i+1} \frac{1}{i\pi r / r_0} \sin(i\pi r / r_0) \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

При $\text{Bi} \rightarrow 0$ ($\text{Bi} < 0,1$) $\mu^2 = 3\text{Bi}$, остается только первое слагаемое в решении и уравнение для безразмерной избыточной температуры

$$\Theta = \frac{\sin(\sqrt{3\text{Bi}} r / r_0)}{\sqrt{3\text{Bi}} r / r_0} \exp(-3\text{Bi} \cdot Fo).$$

Если число Фурье превышает 0,25, то ряд становится настолько быстро сходящимся, что ошибка не превышает 1 %, если распределение температуры ограничить первым членом ряда:

$$\Theta = \frac{2(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1} \frac{\sin(\mu_1 r / r_0)}{\mu_1 r / r_0} \exp(-\mu_1^2 Fo) .$$

Средняя безразмерная избыточная температура, средняя по сечению температура, определение количества теплоты, отданного (полученного) телом в процессе охлаждения (нагрева)

Количество теплоты Q , которое отдает или воспринимает тело за время охлаждения (нагрева), должно равняться изменению его внутренней энергии или энтальпии:

$$Q = Q_{\text{п}} (1 - \bar{\Theta}_1),$$

где $Q_{\text{п}}$ – количество теплоты, отданное (полученное) телом при наступлении теплового равновесия; $\bar{\Theta}_1$ – средняя безразмерная избыточная температура в рассматриваемый момент времени.

$$\bar{\Theta}_1 = (\bar{t}_1 - t_{\text{ж}}) / (t_0 - t_{\text{ж}}),$$

где \bar{t}_1 – средняя по сечению температура тела, т.е. такая температура, которую бы имело тело, все точки которого прогреваются одинаково.

Для пластины полное количество теплоты

$$Q_{\text{п}} = 2 \cdot \delta \cdot f \cdot \rho \cdot c \cdot (t_0 - t_{\text{ж}}) .$$

Средняя безразмерная избыточная температура, определяемая как

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{X} \int_0^X \Theta dX :$$

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_n}{\mu_n^2 + \mu_n \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) . \quad (8.3)$$

При $Bi \rightarrow \infty$ уравнение (8.3) принимает вид

$$\bar{\Theta} = \sum \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo \right].$$

При $Bi \rightarrow 0$ уравнение (8.3) принимает вид

$$\bar{\Theta} = \exp(-Bi \cdot Fo).$$

При значениях критерия Фурье $Fo \geq 0,3$ для пластины можно ограничиться первым членом ряда (8.3), тогда

$$\bar{\Theta} = \frac{2 \sin^2 \mu_1}{\mu_1^2 + \mu_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo). \quad (8.4)$$

Множитель $\frac{2 \sin^2 \mu_1}{\mu_1^2 + \mu_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1}$ зависит только от критерия Bi и может быть представлен как некоторая функция $M(Bi)$, и уравнение (8.4) запишется $\bar{\Theta} = M(Bi) \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo)$. Функция $M(Bi)$ может быть заранее рассчитана и представлена в таблицах, тогда расчет средней температуры будет сводиться только к вычислению экспоненты.

Для цилиндра полное количество теплоты

$$Q_{\text{ц}} = \pi \cdot r_0^2 \cdot l \cdot \rho \cdot c \cdot (t_0 - t_{\text{ж}}).$$

Средняя безразмерная избыточная температура цилиндра может быть найдена как среднее из уравнения

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^1 \Theta 2\pi R dR = \frac{2}{R^2} \int_0^1 \Theta R dR.$$

После подстановки безразмерной избыточной температуры из уравнения (8.1) получаем:

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_1^2(\mu_n)}{\mu_n^2 [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \exp(-\mu_n^2 Fo)$$

или, учитывая, что $J_0(\mu)/J_1(\mu) = \mu/Bi$,

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot Bi^2}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + Bi^2)} \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

При расчете средней температуры цилиндра в случае $Fo > 0,25$ также можно ограничиться одним первым членом ряда:

$$\bar{\Theta} = \frac{4 \cdot Bi^2}{\mu_1^2 (\mu_1^2 + Bi^2)} \exp(-\mu_1^2 Fo) = M_0(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo) .$$

Функция $M_0(Bi)$ может быть заранее рассчитана и затабулирована.

По аналогии с пластиной и цилиндром количество теплоты, воспринимаемое шаром за конечное время τ_1 , определяем из уравнения

$$\frac{Q}{Q_{\Pi}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\mu_n^3} \frac{(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)^2}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} [1 - \exp(-\mu_n^2 Fo)] , \quad (8.5)$$

где $Q_{\Pi} = (4/3) \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot \rho \cdot c \cdot (t_0 - t_{ж})$ – полное количество теплоты, которое отдает шар за время при охлаждении до температуры среды.

Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров (параллелепипед, балка прямоугольного сечения, цилиндр конечной длины) – метод перемножения решений

Тела конечных размеров – параллелепипеды, прямоугольные стержни и цилиндры – можно рассматривать как тела, образованные пересечением взаимно перпендикулярных: а) трех неограниченных пластин; б) двух неограниченных пластин; в) бесконечного цилиндра и неограниченной пластины. Решение таких задач есть произведение безразмерных температур для тел неограниченных размеров, в результате пересечения которых образовалось рассматриваемое тело. Этот метод в теории теплопроводности носит название *теоремы о перемножении решений*. Заметим, что теорема о перемножении решений справедлива и в более общем случае, когда коэффициенты теплопроводности различны для разных направлений, а также коэффициенты теплоотдачи на гранях различны.

Определим температуры различных точек и количество теплоты для параллелепипеда, охлаждающегося в среде с постоянной температурой $t_{ж} = \text{const}$ и постоянным коэффициентом теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ на всех гранях (рис. 8.2). В начальный момент ($\tau = 0$) температура во всех точках параллелепипеда одинакова. Параллелепипед с размерами ребер $2\delta_x \times 2\delta_y \times 2\delta_z$ – однородный и изотропный.

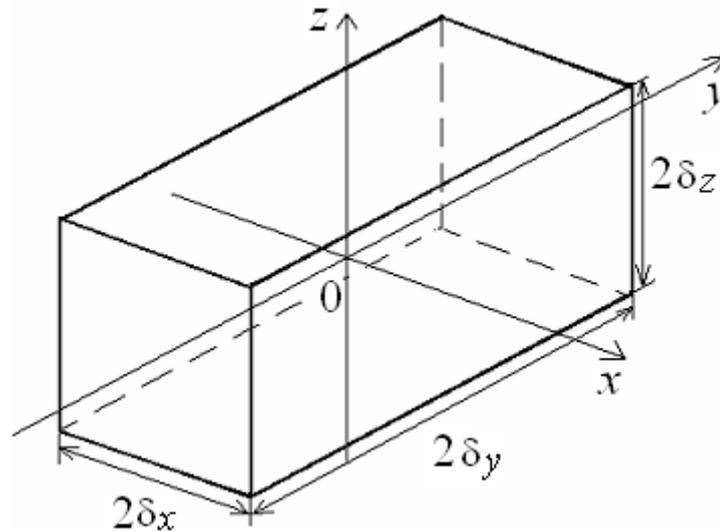


Рис. 8.2

Так как прямоугольный параллелепипед образован пересечением трех взаимно перпендикулярных неограниченных пластин, то решением является произведение трех безразмерных температур:

$$\Theta = \Theta_x \cdot \Theta_y \cdot \Theta_z,$$

$$\Theta_x = \frac{t(x, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = F_x \left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{\alpha \delta_x}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_x^2} \right) = F_x(X, Bi_x, Fo_x),$$

$$\Theta_y = \frac{t(y, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = F_y \left(\frac{y}{\delta_y}, \frac{\alpha \delta_y}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_y^2} \right) = F_y(Y, Bi_y, Fo_y),$$

$$\Theta_z = \frac{t(z, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = F_z \left(\frac{z}{\delta_z}, \frac{\alpha \delta_z}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_z^2} \right) = F_z(Z, Bi_z, Fo_z).$$

Общее решение в развернутом виде запишется как

$$\Theta = \frac{t(x, y, z, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \frac{t(x, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} \cdot \frac{t(y, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} \cdot \frac{t(z, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}.$$

Среднюю безразмерную избыточную температуру для параллелепипеда тоже определяем как произведение средних безразмерных избыточных температур составляющих его пластин:

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t}(x, y, z, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{\bar{t}(x, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \cdot \frac{\bar{t}(y, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \cdot \frac{\bar{t}(z, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}.$$

Однородный стержень охлаждается в среде с постоянной температурой $t_{\text{ж}} = \text{const}$ и постоянным коэффициентом теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ на его поверхности (рис. 8.3). В начальный момент ($\tau = 0$) температура во всех точках стержня одинакова. Поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник размерами $2\delta_x \times 2\delta_y$. Такое тело можно рассматривать как результат пересечения двух пластин толщиной $2\delta_x$ и $2\delta_y$, условия однозначности для которых такие же, как и для образовавшегося стержня. Безразмерное поле температур для такой задачи есть

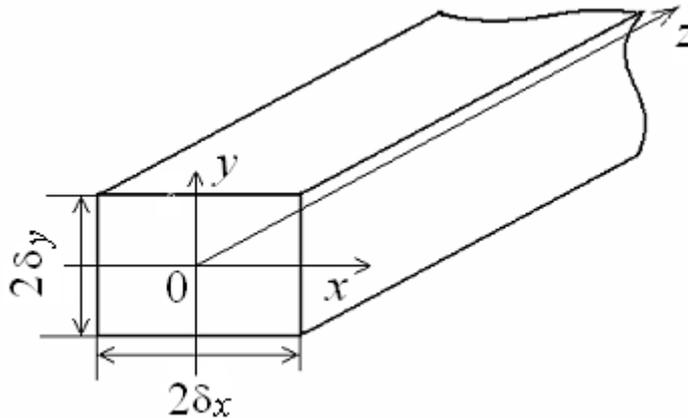


Рис. 8.3

$$\Theta = \Theta_x \cdot \Theta_y,$$

$$\Theta_y = \frac{t(y, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = F_y \left(\frac{y}{\delta_y}, \frac{\alpha \delta_y}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_y^2} \right) = F_y(Y, \text{Bi}_y, \text{Fo}_y).$$

$$\Theta_x = \frac{t(x, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = F_x \left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{\alpha \delta_x}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_x^2} \right) = F_x(X, \text{Bi}_x, \text{Fo}_x)$$

Безразмерная избыточная температура стержня запишется как

$$\Theta = \frac{t(\tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{t(\tau)_x - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \cdot \frac{t(\tau)_y - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}.$$

Средняя безразмерная избыточная температура стержня

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{\bar{t}(\tau)_x - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \cdot \frac{\bar{t}(\tau)_y - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}$$

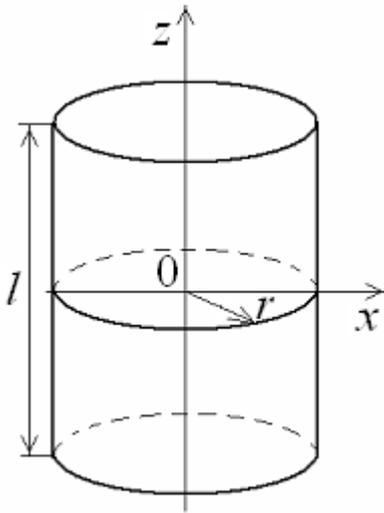


Рис. 8.4

Однородный и изотропный цилиндр охлаждается в среде с постоянной температурой $t_{\text{ж}} = \text{const}$ и постоянным коэффициентом теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ на его боковой поверхности и основаниях (рис. 8.4). В начальный момент ($\tau = 0$) все точки цилиндра имеют одинаковую температуру. Диаметр цилиндра равен $2r_0$, длина $l = 2\delta_x$. Необходимо найти распределение температуры в цилиндре для любого момента времени, а также среднюю температуру как функцию времени для заданных условий однозначности. Конечный цилиндр можно рассматривать как результат пересечения безграничного цилиндра диаметром $2r_0$ и пластины толщиной $2\delta_x$, следовательно, безразмерную температуру для такого тела можно записать как

$$\Theta = \Theta_x \cdot \Theta_r \tag{8.6}$$

$$\Theta_x = \frac{t(x, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = F_x \left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{\alpha \delta_x}{\lambda}, \frac{a\tau}{\delta_x^2} \right),$$

$$\Theta_r = \frac{t(r, \tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = F_r \left(\frac{r}{r_0}, \frac{\alpha r_0}{\lambda}, \frac{a\tau}{r_0^2} \right).$$

Определяющими размерами являются половина высоты цилиндра $l/2 = \delta_x$ и его радиус r_0 , тогда безразмерная избыточная температура цилиндра

$$\Theta = \frac{t(\tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{t(\tau)_x - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \cdot \frac{t(\tau)_r - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}.$$

Средняя безразмерная избыточная температура цилиндра

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{\bar{t}(\tau)_x - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} \cdot \frac{\bar{t}(\tau)_r - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}}. \tag{8.7}$$

Скорость распространения тепла в телах зависит от отношения поверхности к их объему. Чем больше это отношение, тем больше скорость протекания процесса.

Контрольные вопросы

1. Запишите формулы для определения чисел Био и Фурье для цилиндра и шара.
2. Запишите уравнение теплопроводности для цилиндра и для шара.
3. Запишите решение нестационарного уравнения теплопроводности для цилиндра и шара, поясните его структуру.
4. В каком случае и почему для цилиндра и шара безразмерную избыточную температуру можно рассчитать, воспользовавшись только первым членом ряда?
5. Что общего и в чем заключается различие в решениях нестационарного уравнения теплопроводности для пластины, цилиндра и шара?
6. Можно ли температуры центра и поверхности цилиндра и шара определять по номограммам? Если можно, то в каком случае и почему?
7. Запишите характеристические уравнения для цилиндра и шара.
8. Сравните значения температур центра цилиндра и шара одинакового радиуса для произвольного момента времени.
9. Поясните методику определения количества теплоты, отданного (полученного) телами в процессе охлаждения (нагрева).
10. Дайте определения средней безразмерной избыточной температуры, средней по сечению температуры тела.
11. Поясните зависимость средней безразмерной избыточной температуры тела от чисел Био и Фурье.
12. Как определяется полное количество теплоты, отданное (полученное) телом при его охлаждении (нагревании) до температуры среды?
13. На основании какой теоремы определяются температуры тел конечных размеров? Приведите ее формулировку.
14. Пересечением каких бесконечных тел образованы параллелепипед, бесконечная балка прямоугольного сечения и цилиндр конечной длины?
15. В каком случае можно определять температуру тел конечных размеров при помощи номограмм? Поясните методику.
16. Как определяется количество теплоты, отданное (полученное) телами конечных размеров в процессе охлаждения (нагрева)?
17. Поясните зависимость скорости распространения тепла для тел различной формы от отношения поверхности к их объему.
18. Центр куба или шара с одинаковым характерным линейным размером l_0 быстрее прогреется до заданной температуры?

Лекция 9. Регулярный режим охлаждения тел

Стадии процесса охлаждения (нагрева) тел, их характеристики. Регулярный режим охлаждения тел. Темп охлаждения. Применение метода регулярного режима охлаждения тел для экспериментального определения теплофизических свойств веществ.

Стадии процесса охлаждения (нагрева) тел, их характеристики

Анализ полученных решений для тел различной геометрической формы показывает, что все они имеют одинаковую структуру, т.е. представляют собой сумму бесконечного ряда, члены которого расположены по быстро убывающим экспоненциальным функциям [18]. Например, для безграничной пластины при охлаждении ее в среде с постоянной температурой $t_{ж}$ и постоянным коэффициентом теплоотдачи α на ее поверхностях получено:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right).$$

В этом уравнении A_n – постоянный коэффициент, свой для каждого члена ряда (не зависящий ни от координат, ни от времени), найден из начальных условий.

Множитель $\cos(\mu_n x / \delta)$ является функцией только координаты x , и его можно обозначить U_n . Величина экспоненты будет убывать пропорционально времени τ . Комплекс $\mu_n^2 \cdot a / \delta^2$ представляет постоянное вещественное число, которое можно обозначить m_n , причем m_n будет изменяться в зависимости от номера индекса так же, как μ_n , т.е.

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n < \dots, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.1)$$

С учетом сказанного выражение для избыточной температуры для пластины можно представить как

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n \exp(-m_n \tau). \quad (9.2)$$

Для тел других геометрических форм температурное поле также будет описываться уравнением вида (9.2). Специфика геометрической формы учитывается различным видом множителей A_n и U_n . Для тела одной и той же геометрической формы различным начальным распределениям температур будут соответствовать разные совокупности чисел A_n .

При малых значениях времени от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_1$ распределение температуры внутри тела и скорость изменения во времени температуры в отдельных точках тела зависят от особенностей начального распределения температур (рис. 9.1). В этих условиях поле температур будет определяться не только первым, но и последующими членами ряда (9.2). Этот первый период охлаждения, при котором скорость изменения температуры внутри тела зависит от вида начального распределения температур, называют неупорядоченной стадией процесса охлаждения (нагревания). Благодаря неравенству (9.1) с увеличением времени τ последующие члены ряда (9.2) будут быстро убывать, т. е. ряд становится быстросходящимся.

С некоторого момента времени $\tau > \tau_1$ начальные условия начинают играть второстепенную роль и процесс полностью определяется только условиями охлаждения на границе тела и среды, физическими свойствами тела и его геометрической формой и размерами. Температурное поле описывается первым членом ряда, т. е.

$$\vartheta = AU \exp(-m\tau). \quad (9.3)$$

Это соотношение показывает, что относительное изменение температуры как в пространстве, так и во времени не зависит от начального распределения температур. Логарифмируя последнее уравнение и опуская индексы, получаем

$$\ln \vartheta = \ln(AU) - m\tau$$

или

$$\ln \vartheta = -m\tau + C(x, y, z). \quad (9.4)$$

Из этого уравнения следует, что натуральный логарифм избыточной температуры для всех точек тела изменяется во времени по линейному закону. Графическая зависимость будет иметь вид прямой. При длительном охлаждении ($\tau \rightarrow \infty$ или $Fo \rightarrow \infty$) все точки тела в конце концов принимают одинаковую температуру, равную температуре окружающей среды (наступило стационарное состояние). Таким образом, весь процесс охлаждения можно разделить на три стадии.

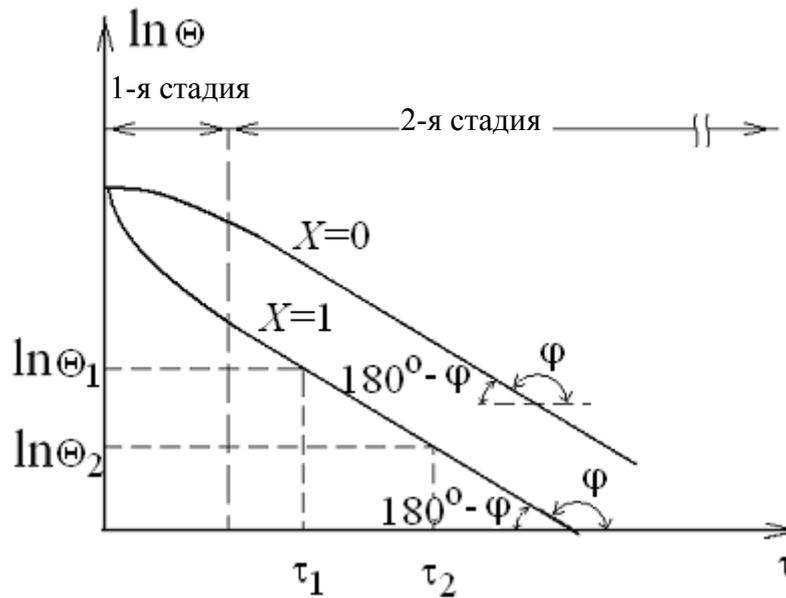


Рис. 9.1

Первая стадия неупорядоченного режима характеризуется большим влиянием начального распределения температуры, и зависимость между температурным напором и временем описывается уравнением (9.2).

Вторая стадия охлаждения называется регулярным режимом и описывается уравнением (9.3). В этой стадии поле избыточной температуры автоматически по времени, т. е. остается подобным при изменении времени.

Третья стадия охлаждения соответствует стационарному режиму, когда температура во всех точках тела равна температуре окружающей среды (тепловое равновесие).

Регулярный режим охлаждения тел. Темп охлаждения

После дифференцирования уравнения (9.4) по времени получаем:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -m = \text{const} \quad (9.5)$$

В левой стороне уравнения (9.5) стоит выражение для относительной скорости изменения температуры, и оно равняется постоянной величине m , не зависящей ни от координат, ни от времени.

Величина m имеет размерность $1/\text{с}$ и называется темпом охлаждения. При наступлении регулярного режима темп охлаждения не зависит ни от координат, ни от времени и является постоянной величиной для всех точек те-

ла. Темп охлаждения характеризует относительную скорость изменения температуры в теле и зависит только от физических свойств тела, процесса охлаждения на его поверхности, геометрической формы и размеров тела.

Итак, регулярный режим охлаждения (нагревания) тел характеризуется тем, что изменение температурного поля во времени описывается простой экспонентой и относительная скорость охлаждения m для всех точек тела остается величиной постоянной, не зависящей ни от координат, ни от времени.

Измерения темпа регулярного режима обычно проводят в следующем порядке. Тело из испытуемого материала помещается в термостат, в котором поддерживается постоянная температура жидкости, например, жидкость приводится в движение винтом и интенсивно омывает поверхность тела. По результатам измерений избыточной температуры от времени строится зависимость в полулогарифмических координатах, как на [рис. 9.1](#). По графику определяется участок линейной зависимости логарифма избыточной температуры от времени, из которого следует, что темп охлаждения можно определить как тангенс угла наклона прямой в стадии регулярного режима по следующему выражению:

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1} = m = \operatorname{const}.$$

Следует отметить, что данный метод определения величины темпа охлаждения пригоден для веществ с низкой теплопроводностью ($\lambda < 0,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$). При проведении опыта необходимо обеспечить условия $Bi \geq 100$, при этом в термостатах коэффициент теплоотдачи обычно не превышает $200 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$, а размеры тела не превышают 25 мм. Это обстоятельство ограничивает использование регулярного режима для измерения коэффициента температуропроводности в лабораторных условиях.

Выражение для зависимости темпа охлаждения от физических свойств тела, его геометрической формы и размеров, а также условий теплообмена на поверхности тела можно найти из анализа уравнения теплового баланса.

Изменение внутренней энергии (энтальпии) тела

$$dQ = -c \cdot V \cdot \rho \cdot \frac{\partial \bar{\vartheta}_v}{\partial \tau} \cdot d\tau, \quad (9.6)$$

где c – удельная теплоемкость, $\text{Дж/(кг}\cdot\text{°C)}$; V – объем тела, м^3 ; ρ – плотность вещества, кг/м^3 ; $\bar{\vartheta}_v$ – средняя по объему избыточная температура, °C ; τ – время, с.

С другой стороны, за тот же промежуток времени все тепло должно быть отведено с поверхности тела в окружающую среду за счет теплоотдачи:

$$dQ = \bar{\alpha} \cdot \bar{\vartheta}_F \cdot F \cdot dt, \quad (9.7)$$

где $\bar{\alpha}$ – среднее значение коэффициента теплоотдачи, Вт/(м²·К);

$\bar{\vartheta}_F = \frac{1}{F} \int \vartheta_F dF$ – средняя температура поверхности тела в данный момент

времени, °С; F – поверхность тела, м².

Приравняем выражения (9.6) и (9.7):

$$-c \cdot V \cdot \rho \cdot \frac{\partial \bar{\vartheta}_v}{\partial \tau} \cdot dt = \bar{\alpha} \cdot \bar{\vartheta}_F \cdot F \cdot dt,$$

выразим производную:

$$-\frac{\partial \bar{\vartheta}_v}{\partial \tau} = \frac{\bar{\alpha} F}{c V \rho} \cdot \bar{\vartheta}_F,$$

разделим обе части на среднюю по объему избыточную температуру, обозначим $c V \rho = C$ (полная теплоемкость, Дж/°С), получим:

$$-\frac{1}{\bar{\vartheta}_v} \frac{\partial \bar{\vartheta}_v}{\partial \tau} = \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_v} \cdot \frac{\bar{\alpha} F}{C}.$$

В левой части этого выражения относительная скорость охлаждения m , 1/с, и, если обозначить отношение средней по поверхности к средней по объему температуре $\Psi = \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_v}$, тогда

$$m = \Psi \frac{\bar{\alpha} F}{C}. \quad (9.8)$$

Первая теорема Кондратьева. Относительная скорость охлаждения (темп охлаждения) однородного и изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи α пропорциональна коэффициенту теплоотдачи на поверхности тела и обратно пропорциональна его полной теплоемкости.

В уравнении (9.8) множитель $\Psi = \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_v}$ называется коэффициентом не-равномерности распределения температуры в теле и зависит от условий охлаждения тела. Для выяснения характера зависимости Ψ от критерия Bi , учитывающего условия протекания процесса на поверхности, рассмотрим два предельных случая: а) критерий Био стремится к нулю (практически

$Bi < 0,1$) (рис. 7.4, б). Температуры по объему и по поверхности равны, следовательно, $\Psi = 1$; б) критерий Био стремится к бесконечности (практически $Bi > 100$) (рис. 7.4, а). Задача внутренняя, температура поверхности равна температуре окружающей среды, температурный напор на поверхности равен нулю, следовательно, $\Psi = 0$. Получаем, что значение коэффициента неравномерности распределения температуры в теле меняется от нуля до единицы.

Кроме того, существует еще один предельный случай.

Вторая теорема Кондратьева. При коэффициенте теплоотдачи, стремящемся к бесконечности, темп охлаждения становится прямо пропорционален коэффициенту теплопроводности тела:

$$a = Km_{\infty} . \quad (9.9)$$

Коэффициент пропорциональности K зависит только от геометрической формы и размеров тела. Докажем это на примере безграничной пластины, толщина которой равна δ . Напомним, что

$$m = \mu_n^2 a / \delta^2 ,$$

откуда

$$\mu = \delta \sqrt{m/a} . \quad (9.10)$$

Решение характеристического уравнения $\text{ctg}(\mu) = \frac{\mu}{Bi}$ имеет предельные случаи: если $Bi \rightarrow \infty$, то $\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, предельное значение которого равно $\pi/2$; если $Bi \rightarrow 0$, то $\mu_n = (n-1)\pi$, предельное значение которого равно нулю. Следовательно, величина μ для пластины во всем диапазоне значений чисел Био изменяется от нуля до своего предельного значения, равного $\pi/2$. Для тел другой геометрической формы имеют место свои пределы изменения величины μ .

Так как при $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$) при охлаждении бесконечной однородной пластины можно принять $\mu = \pi/2$, то из уравнения (9.10) следует:

$$m_{\infty} = \left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^2 a , \quad (9.11)$$

тогда, сравнивая выражения (9.9) и (9.11), получаем уравнение для коэффициента пропорциональности K :

$$K = \frac{1}{(\pi/2\delta)^2} .$$

Для тел другой геометрической формы коэффициенты пропорциональности определяются из следующих выражений:

для шара

$$K = \frac{1}{(\pi/r_0)^2} ;$$

для параллелепипеда

$$K = \frac{1}{(\pi/l_1)^2 + (\pi/l_2)^2 + (\pi/l_3)^2} ;$$

для цилиндра конечной длины

$$K = \frac{1}{(\pi/l)^2 + (2,405/r_0)^2} .$$

Применение метода регулярного режима охлаждения тел для экспериментального определения теплофизических свойств веществ

На основе теории регулярного режима разработаны различные экспериментальные методики определения теплофизических характеристик разных материалов. При определении физических параметров тела поступают следующим образом:

Для определения коэффициента температуропроводности используют альфа – калориметр, имеющий форму цилиндра или шара. Создают условия охлаждения, близкие к $\alpha \rightarrow \infty$, измеряют изменение избыточной температуры во времени, строят зависимость в полулогарифмических координатах (см. [рис. 9.1](#)) и определяют темп охлаждения:

$$m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1} .$$

Из уравнения (9.9) находят коэффициент температуропроводности.

Для определения коэффициента теплопроводности выбирают лямбда – калориметр, обычно в виде шара. Сущность метода заключается в том, что создают условия охлаждения, при которых коэффициент теплоотдачи остается постоянной конечной величиной. При этих условиях определяют темп охлаждения описанным выше способом. Далее находят коэффициент теплопроводности из характеристического уравнения для шара (8.2):

$$\operatorname{tg}(\mu) = -\frac{\mu}{\operatorname{Bi} - 1}.$$

Характерным линейным размером для шара является его радиус r_0 , величина $\mu = r_0 \sqrt{m/a}$, тогда характеристическое уравнение (8.2) принимает вид

$$\operatorname{Bi} - 1 = -r_0 \sqrt{m/a} \cdot \operatorname{ctg}(r_0 \sqrt{m/a}),$$

откуда получаем:

$$\lambda = \frac{\bar{\alpha} \cdot r_0}{1 - r_0 \sqrt{m/a} \cdot \operatorname{ctg}(r_0 \sqrt{m/a})}. \quad (9.12)$$

В уравнении (9.12) неизвестная величина $\bar{\alpha}$ определяется на эталонном калориметре, изготовленном из материала с известным коэффициентом теплопроводности.

Мы рассмотрели метод регулярного теплового режима для условий, когда температура среды постоянная ($t_{ж} = \text{const}$) и который Г. М. Кондратьев назвал регулярным режимом первого рода. Достоинство метода заключается в простоте техники эксперимента, достаточной точности получаемых результатов и малой продолжительности эксперимента.

В последние годы получили развитие и широкое распространение методы регулярного режима для случаев, когда температура среды – линейная или периодическая функция времени, которые соответственно стали называть методами регулярного режима второго и третьего рода соответственно.

А. В. Лыков показал, что регуляризация кинетики нагревания тела происходит не только по температурным полям, но и по потокам теплоты. Поэтому при нагревании нет надобности различать регулярные режимы первого, второго и третьего родов.

Контрольные вопросы

1. Перечислите стадии охлаждения тел, охарактеризуйте их.
2. Поясните структуру формулы для определения безразмерной избыточной температуры тела в стадии регулярного режима. Что общего в ней для тел разной формы?
3. Дайте определение, расчетную формулу и единицы измерения темпа охлаждения. Поясните особенности этой величины в стадии регулярного режима.
4. Поясните методику экспериментального определения стадии регулярного режима охлаждения тела.
5. Постройте в полулогарифмических координатах зависимость температурного напора от времени для регулярного режима.
6. Сформулируйте теоремы Кондратьева.
7. Для определения каких теплофизических свойств используют теорию регулярного режима?
8. Поясните методику определения коэффициента температуропроводности методом регулярного режима.
9. Поясните методику определения коэффициента теплопроводности методом регулярного режима.
10. Чем отличаются друг от друга регулярные режимы первого, второго и третьего рода?

МОДУЛЬ 2. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ

Лекция 10.

Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

Основные понятия и определения процессов конвективного теплообмена. Физические свойства жидкостей. Гидродинамический и тепловой пограничные слои. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена для несжимаемой жидкости. Пример системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена.

Основные понятия и определения процессов конвективного теплообмена

Понятие конвективного теплообмена охватывает процесс теплообмена при движении жидкости или газа. При этом перенос тепла осуществляется одновременно конвекцией и теплопроводностью. Конвекция тепла всегда сопровождается теплопроводностью, так как при движении жидкости или газа неизбежно соприкосновение отдельных частиц, имеющих различные температуры [5, 8, 18, 26, 32].

Конвективный теплообмен между потоком жидкости или газа и поверхностью твердого тела называется конвективной теплоотдачей. Обычно при инженерных расчетах определяют теплоотдачу, знание конвективного теплообмена внутри жидкой среды может представить при этом косвенный интерес, поскольку перенос тепла внутри жидкости отражается и на теплоотдаче. Результирующий поток тепла всегда направлен в сторону уменьшения температуры.

При практических расчетах используют закон Ньютона – Рихмана:

$$Q = \alpha \cdot (t_c - t_{ж}) \cdot F.$$

Согласно закону Ньютона – Рихмана тепловой поток от жидкости к стенке или от стенки к жидкости пропорционален поверхности теплообмена и разности температур поверхности стенки и окружающей среды (температурному напору). Коэффициент пропорциональности в этом уравнении называется коэффициентом теплоотдачи и может быть переменным по поверхности теплообмена. Тогда для элемента поверхности dF

$$\alpha \equiv \frac{dQ}{(t_c - t_{ж}) \cdot dF} = \frac{q}{t_c - t_{ж}}. \quad (10.1)$$

Данное тождество следует рассматривать как определение коэффициента теплоотдачи. Таким образом, коэффициент теплоотдачи есть плотность теплового потока на поверхности тела, отнесенная к разности температур между стенкой и жидкостью, и численно равен плотности теплового потока при температурном напоре, равном единице.

Теплоотдача является сложным процессом, конкретные условия учитываются коэффициентом теплоотдачи, который зависит от большого числа факторов. В наиболее общем случае он зависит от формы и размеров тела, режима движения, скорости и температуры жидкости, ее физических параметров. По-разному протекает процесс теплоотдачи в зависимости от природы возникновения движения жидкости.

Различают вынужденную и естественную конвекцию. В первом случае жидкость или газ движутся за счет внешних для данного процесса сил (насос, вентилятор, ветер), во втором случае – за счет разности плотностей нагретых и холодных частиц жидкости. Возникновение и интенсивность свободного или естественного движения всецело определяются тепловыми условиями процесса и зависят от рода жидкости, разности температур и объема пространства, в котором протекает процесс.

Свободное движение может появиться в жидкости (газе) с переменной плотностью, очевидно, только в том случае, если жидкость находится в поле массовых сил (например, в поле земного тяготения). В дальнейшем в основном будет рассматриваться гравитационная свободная конвекция при фиксированной величине ускорения силы тяжести, не равной нулю, в отсутствии других массовых сил.

Вынужденное движение может сопровождаться свободным. Относительное влияние последнего тем больше, чем больше разница температур отдельных частиц жидкой среды и меньше скорость вынужденного движения.

В дальнейшем будут рассмотрены только стационарные процессы течения и теплоотдачи. Условие стационарности – неизменность во времени скорости и температуры в любой точке жидкости.

Физические свойства жидкостей

В качестве жидких теплоносителей в настоящее время используют различные вещества: воздух, углекислый и другие газы, воду, масла, нефть, бензол, спирт, жидкие металлы, различные растворители и др. В зависимости от физических свойств этих веществ процесс теплоотдачи протекает различно и своеобразно. Особенно большое влияние на теплоотдачу оказывают следующие физические параметры: коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость c , плотность ρ , коэффициент температуропроводности a и коэф-

коэффициент вязкости μ . Для каждого вещества эти параметры имеют определенные значения и, как правило, являются функцией температуры, а некоторые из них и давления.

Величины λ , c , ρ , a уже использовались при рассмотрении теплопроводности. В задачах конвективного теплообмена большое значение приобретает также вязкость. Все реальные жидкости обладают вязкостью, между частицами и слоями, движущимися с различными скоростями, всегда возникает сила внутреннего трения, противодействующего движению. Согласно закону Ньютона эта касательная сила (отнесенная к единице поверхности), которая действует в любой точке потока, в плоскости, ориентированной по течению, пропорциональна изменению скорости в направлении нормали к направлению движения: $s = \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial n}$. Коэффициент пропорциональности μ называется коэффициентом динамической вязкости или просто вязкости. При градиенте скорости, равном единице, он численно равен касательной силе.

В уравнения гидродинамики и теплопередачи часто входит отношение вязкости и плотности, называемое коэффициентом кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Коэффициенты динамической и кинематической вязкости являются физическими параметрами, они существенно зависят от температуры.

У капельных жидкостей вязкость почти не зависит от давления, но значительно уменьшается при повышении температуры. Типичный характер функции $\mu = f(t)$ для капельных жидкостей представлен на [рис. 10.1](#) (для воды). У газов вязкость увеличивается при повышении температуры ([рис. 10.2](#)) (для воздуха при атмосферном давлении).

При увеличении давления коэффициент вязкости газов также увеличивается, но не столь существенно. Зависимость вязкости от давления различна для разных газов. Для воздуха увеличение давления от 1 до 50 бар приводит к увеличению вязкости примерно на 5%. При давлении ниже атмосферного вязкость газов начинает зависеть от давления (уменьшается при уменьшении давления) тогда, когда расстояние между поверхностями, где течет газ, одного порядка или меньше средней длины свободного пробега молекул, которое увеличивается с уменьшением давления.

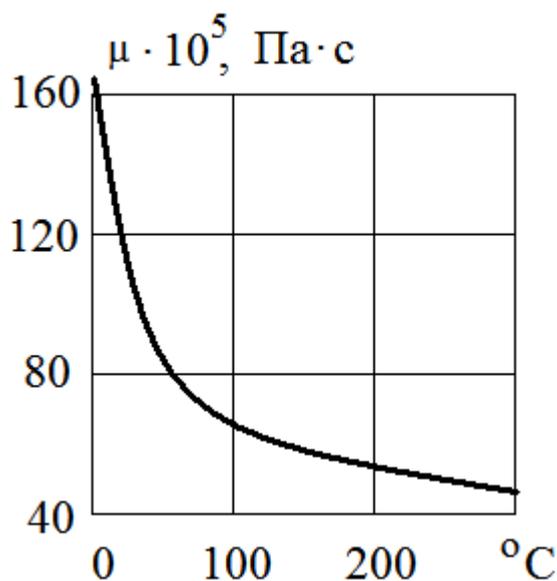


Рис. 10.1

Кинематическая вязкость капельных жидкостей пропорциональна динамической вязкости, так как их плотность слабо зависит от температуры. Напротив, у газов кинематический коэффициент вязкости сильно растет, так

как с ростом температуры падает их плотность (см. [рис. 10.2](#)). При течении жидкости или газа с вязкостью наличие внутреннего трения приводит к диссипации (рассеянию) энергии. Часть механической энергии переходит в тепловую и вызывает нагревание жидкости. Если вязкость жидкости или ее скорость невелики, то нагревание будет незначительным. В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, в которых можно пренебречь теплотой трения.

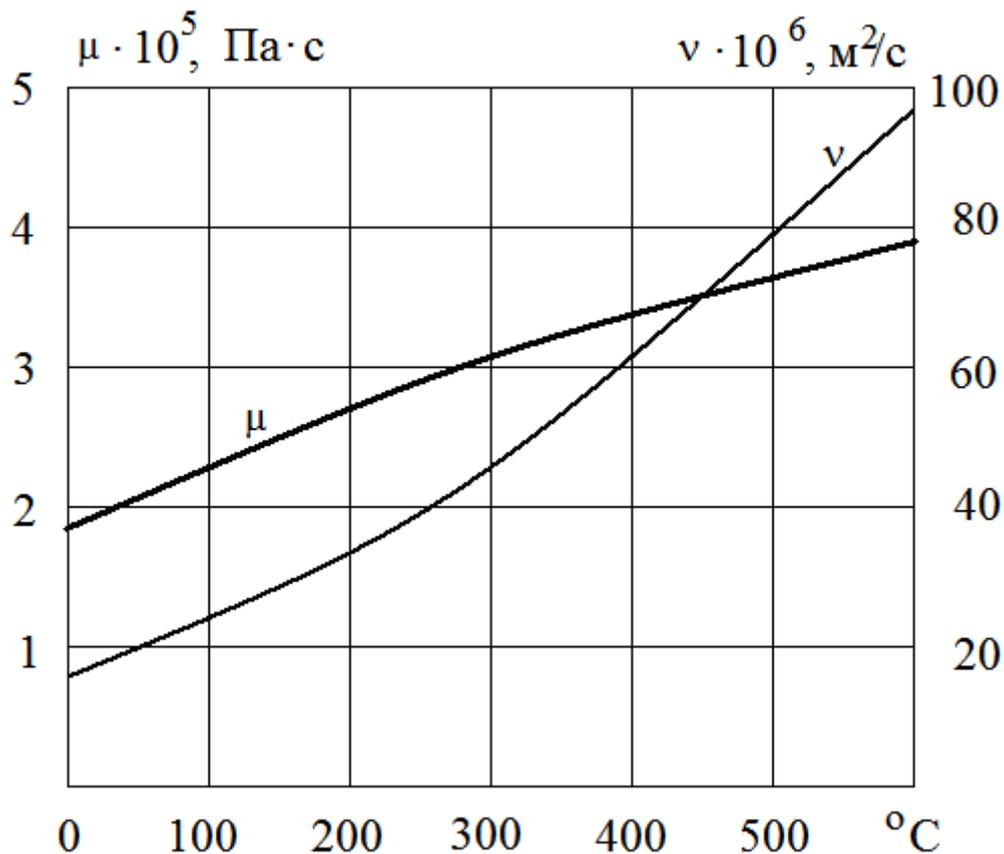


Рис. 10.2

На теплоотдачу оказывает влияние сжимаемость жидкости. Изотермической сжимаемостью или коэффициентом сжатия тела при постоянной температуре называют положительную величину $\varepsilon_t = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_{t=\text{const}}$, представляющую собой относительное изменение удельного объема при изменении давления на единицу.

Для капельных жидкостей сжимаемость мала, например, для воды $\varepsilon_t \cong -1/20000 \text{ бар}^{-1}$, т.е. повышение давления на единицу вызывает относительное изменение объема на $1/20000$. Для воздуха в нормальном состоянии $\varepsilon_t \cong 1 \text{ бар}^{-1}$. Аналогично для других газов. Тем не менее, будем рассматривать жидкости (в том числе и газы) как несжимаемые. Условной границей считается, что если число Маха $M < 0,25$, то жидкость несжимаемая.

На конвективный теплообмен также оказывает влияние тепловое расширение жидкости, которое характеризуется температурным коэффициентом

объемного расширения, определяемым уравнением $\beta = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{p=\text{const}}$, представляющим собой относительное изменение удельного объема при изменении температуры на один градус. Для жидкостей тепловое расширение мало, для некоторых, например, для воды при температурах, меньших 4 °С, отрицательно. Для идеального газа $\beta = \frac{1}{T}$. В неравномерно нагретой жидкости вследствие теплового расширения возникает неоднородное поле плотности, что в конечном итоге может привести к свободному движению.

Гидродинамический и тепловой пограничные слои

Рассмотрим продольное обтекание поверхности тела безграничным потоком жидкости. Скорость и температура набегающего потока постоянны и равны w_0 и t_0 . На поверхности тела частицы жидкости прилипают к ней. В результате в области около пластины вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой слабозаторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока (вдали от тела), который называется гидродинамический пограничный слой (рис. 10.3). Это понятие впервые было введено Л. Прандтлем в 1904 г. С увеличением координаты x , отсчитываемой от передней кромки тела, толщина δ гидродинамического пограничного слоя увеличивается. Для течения жидкости внутри пограничного слоя $\partial w / \partial y \neq 0$, вне пограничного слоя и на его внешней границе $\partial w / \partial y = 0$, $w = w_0$. Так как реально точной границы нет, то условием считается отличие скорости не более 1 %.

Течение в пограничном слое может быть ламинарным и турбулентным. Сначала – ламинарное, затем может перейти в турбулентное. Граница перехода не является точкой, это отрезок, которому соответствует неустойчивый переходный режим. Для турбулентного пограничного слоя характерным является то, что в пристеночной области имеется тонкий вязкий ламинарный подслой почти постоянной толщины, так как условие прилипания не допускает пульсаций скорости на стенке.

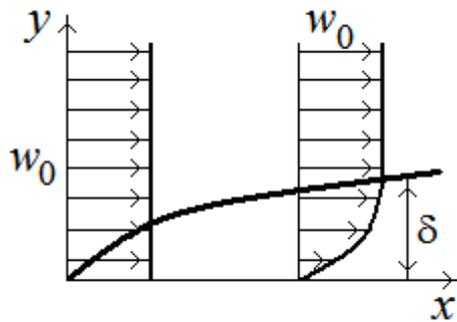


Рис. 10.3

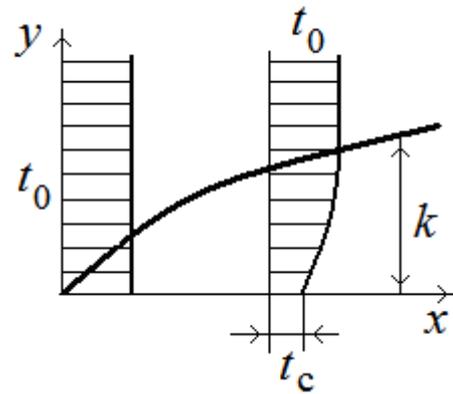


Рис.10.4

Аналогично понятию гидродинамического пограничного слоя Г. Н. Кружилиным было введено понятие теплового пограничного слоя (рис. 10.4). Тепловой пограничный слой – это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от t_0 до t_c . Для области внутри теплового пограничного слоя $\partial t / \partial y \neq 0$, а на внешней границе $\partial t / \partial y = 0$ и $t = t_0$. Таким образом, все изменение температуры жидкости сосредоточено в сравнительно тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела.

Толщины гидродинамического и температурного погранслоев в общем случае не равны, соотношение толщин зависит от рода жидкости и формы поверхности.

Форма и размеры теплоотдающей поверхности существенно влияют на теплоотдачу. В зависимости от этих факторов может резко меняться характер обтекания поверхности, по-иному строиться погранслои. В технике имеется большое многообразие поверхностей нагрева, но даже если взять лишь простые геометрические формы тела – плиту и трубу, то из них можно составить большое количество теплоотдающих поверхностей.

Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена для несжимаемой жидкости

Уравнение теплоотдачи. Так как у поверхности твердого тела имеется тонкий слой неподвижной жидкости, то для этого слоя можно использовать закон Фурье: $q = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{n=0}$. От стенки к жидкости тепло передается в процессе теплоотдачи, и справедлив закон Ньютона – Рихмана: $q = \alpha \cdot \vartheta_c$. В стационарном случае эти тепловые потоки равны, тогда коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_c} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (10.2)$$

Уравнение энергии. Основано на законе сохранения энергии:

$$\frac{D\vartheta}{D\tau} = a \cdot \nabla^2 \vartheta, \quad (10.3)$$

где $\frac{D\vartheta}{D\tau} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ – субстанциональная производная температуры.

Уравнение движения. Основано на втором законе Ньютона:

$$\frac{D\vec{w}}{D\tau} = \vec{g}\beta\vartheta - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{w}, \quad (10.4)$$

где $\frac{Dw_i}{D\tau} = \frac{\partial w_i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_i}{\partial z}$ – субстанциональная производная скорости, а $\beta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \vartheta}$ – температурный коэффициент объемного

расширения, который будем считать постоянной величиной (это условие хорошо выполняется для газов и хуже для капельных жидкостей).

Так как в уравнение движения (10.4) входит еще одна неизвестная величина – плотность, то система уравнений не является замкнутой.

Уравнение неразрывности (сплошности). Основано на законе сохранения массы для несжимаемых жидкостей:

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0. \quad (10.5)$$

Условия однозначности. Полученные дифференциальные уравнения конвективного теплообмена описывают бесчисленное множество конкретных процессов. Чтобы выделить из бесчисленного количества рассматриваемый процесс и определить его однозначно, к системе дифференциальных уравнений нужно присоединить краевые условия (или условия однозначности).

Пример системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена

Запишем пример системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Пусть поверхность твердого тела омывается несжимаемой жидкостью (рис. 10.5), температура и скорость которой вдали от тела постоянны и равны, соответственно, t_0 и w_0 . Размеры тела l_0 и другие заданы. Температура поверхности тела равна t_c . Для определенности примем, что $t_c > t_0$. Будем полагать, что физические параметры жидкости постоянны (учтем только подъемную силу, возникающую в результате зависимости плотности от температуры). Теплота трения не учитывается. Рассматриваемый процесс является стационарным. Расположим оси координат так, как показано на

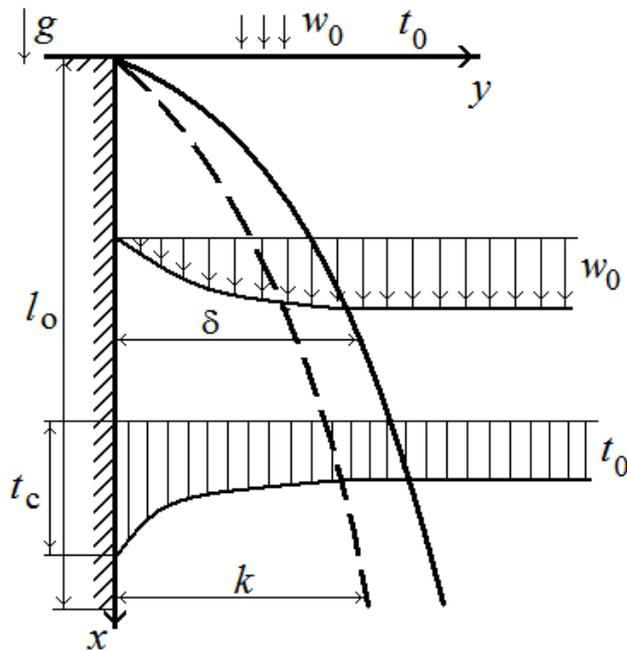


Рис. 10.5

рис. 10.5. Для простоты примем, что ось y нормальна к поверхности тела, а ось x направлена вдоль тела и вертикальна. При этом $g_x = g$, а проекции вектора силы тяжести (или подъемной силы) на оси y и z будут равны нулю ($g_y = g_z = 0$).

При принятых условиях конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений (10.2), (10.3), (10.4), (10.5), для которой из-за стационарности процесса равны нулю частные производные по времени:

уравнение теплоотдачи (10.2):

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_c} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0},$$

уравнение энергии (10.3):

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right),$$

уравнение неразрывности (10.5):

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0,$$

уравнения движения (10.4):

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = g\beta\vartheta - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{d^2 w_x}{dx^2} + \frac{d^2 w_x}{dy^2} + \frac{d^2 w_x}{dz^2} \right),$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \left(\frac{d^2 w_y}{dx^2} + \frac{d^2 w_y}{dy^2} + \frac{d^2 w_y}{dz^2} \right),$$

$$w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \left(\frac{d^2 w_z}{dx^2} + \frac{d^2 w_z}{dy^2} + \frac{d^2 w_z}{dz^2} \right).$$

Напишем граничные условия:

- 1) вдали от тела ($x < 0$): $\vartheta = \vartheta_0 = t_0 - t_0 = 0$, $w_x = w_0$, $w_y = w_z = 0$;
- 2) на поверхности тела ($y=0, 0 \leq x \leq l_0$): $\vartheta = \vartheta_c = t_c - t_0 = \text{const}$.
 $w_x = w_y = w_z = 0$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Ньютона – Рихмана.
2. Запишите определение коэффициента теплоотдачи.
3. Перечислите виды конвекции и дайте их определение.
4. Каким процессом является теплоотдача – простым или сложным – и почему?
5. Перечислите теплофизические свойства жидкостей. Назовите порядок величины коэффициентов вязкости для воды и воздуха при комнатной температуре.
6. Является ли коэффициент теплоотдачи теплофизическим свойством и почему?
7. Запишите определение и единицы измерения динамической и кинематической вязкости.
8. Перечислите режимы течения жидкостей. Какое критериальное число их определяет?
9. Как и почему зависит теплоотдача от режимов течения жидкости?
10. Дайте определение гидродинамического и температурного пограничных слоев.

Лекция 11. подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена

Теория подобия как теоретическая основа экспериментального изучения конвективного теплообмена. Критериальные уравнения. Критерии подобия. Методы экспериментального определения коэффициентов теплоотдачи. Осреднение коэффициентов теплоотдачи. Осреднение температуры жидкости по сечению. Осреднение температуры жидкости и температурного напора по длине трубы. Получение эмпирических критериальных уравнений. Определяющий размер. Определяющая температура.

Теория подобия как теоретическая основа экспериментального изучения конвективного теплообмена

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности с большим количеством переменных. Попытки аналитического решения этой системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности. В настоящее время точные решения имеются только для отдельных частных случаев. Поэтому большое значение приобретает экспериментальный путь исследования. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить численные значения искоемых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако при изучении столь сложного процесса, как конвективный теплообмен, не всегда легко проводить и опытное исследование [18].

Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно или затруднительно из-за большого количества переменных. Кроме того, при этом нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо конкретной установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образец). Эти трудности помогает разрешить теория подобия.

Явления, принадлежащие одному и тому же классу, описываются одинаковыми по физическому содержанию и форме записи дифференциальными уравнениями и называются подобными процессами. Те явления природы, которые описываются одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями, но различны по своему физическому содержанию, называются аналогичными.

Общие условия подобия физических процессов составляют содержание теоремы Кирпичева – Гухмана (1931 г.):

1. Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми, т. е. они должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями.

2. Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всем, кроме численных значений постоянных, содержащихся в этих условиях.

3. Одноименные определяющие критерии подобных процессов должны иметь одинаковую численную величину.

С помощью теории подобия размерные физические величины можно объединить в безразмерные комплексы, причем так, что число комплексов будет меньше числа величин, из которых составлены эти комплексы. Полученные безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные. При введении в уравнения безразмерных комплексов число величин под знаком функции формально сокращается, что упрощает исследование физических процессов. Кроме того, новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных одиночных факторов, но и их совокупности, что позволяет легче определить физические связи в исследуемом процессе.

Теория подобия устанавливает также условия, при которых результаты лабораторных исследований можно распространить на другие явления, подобные рассматриваемому. Ввиду этого теория подобия является прежде всего теоретической базой эксперимента, но не только. В ряде случаев теория подобия облегчает анализ процесса и описание полученных результатов, хотя с ее помощью вид искомой функции не может быть определен.

Теория подобия развивалась в основном благодаря трудам советских ученых А. А. Гухмана, М. В. Кирпичева, М. А. Михеева, Б. С. Петухова и др.

Критериальные уравнения. Критерии подобия

Для практического использования выводов теории подобия необходимо уметь приводить к безразмерному виду математические описания изучаемых процессов. В результате применения метода масштабных преобразований систему безразмерных дифференциальных уравнений (10.2, 10.3, 10.4, 10.5) можно записать в следующем виде:

$$\text{Nu} = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} \quad (11.1)$$

$$\text{Pe} \cdot \left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} + W_z \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \right) = \nabla^2 \Theta, \quad (11.2)$$

$$\text{Re} \cdot \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} + W_z \frac{\partial W_x}{\partial Z} \right) = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \Theta - \frac{\partial}{\partial X} (\text{Eu} \cdot \text{Re}) + \nabla^2 W_x, \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} + \frac{\partial W_z}{\partial Z} = 0. \quad (11.4)$$

Здесь $Nu = \frac{\alpha \times l_0}{\lambda}$ – критерий Нуссельта; $Pe = \frac{w_0 \cdot l_0}{a}$ – критерий Пекле;

$Re = \frac{w_0 \cdot l_0}{\nu}$ – критерий Рейнольдса; $Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \vartheta_c \cdot l_0^3}{\nu^2}$ – критерий Грасгофа;

$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot w_0^2} = \frac{p - p_0}{\rho \cdot w_0^2}$ – критерий Эйлера.

К уравнениям (11.1), (11.2), (11.3), (11.4) еще нужно добавить безразмерные уравнения движения относительно осей y и z .

Система безразмерных дифференциальных уравнений и безразмерные условия однозначности представляют собой математическую формулировку задачи. Безразмерные величины $X, Y, Z, Nu, \Theta, W_x, W_y, W_z, Re, Pe, Gr$ и Eu можно рассматривать как новые переменные. Их по-прежнему можно разделить на три группы: независимые переменные – это безразмерные координаты X, Y, Z ; зависимые переменные – это $Nu, \Theta, W_x, W_y, W_z$ и Eu , они однозначно определяются значениями независимых переменных при определенных значениях величин, входящих в условия однозначности; постоянные величины – это Re, Pe, Gr , они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи являются постоянными. В результате можно написать:

$$Nu = f_1(X, Y, Z, Pe, Re, Gr), \quad (11.5)$$

$$\Theta = f_2(X, Y, Z, Pe, Re, Gr), \quad (11.6)$$

$$Eu = f_3(X, Y, Z, Pe, Re, Gr), \quad (11.7)$$

$$W_x = f_4(X, Y, Z, Pe, Re, Gr). \quad (11.8)$$

Уравнения вида (11.5), (11.6), (11.7), (11.8) называются критериальными уравнениями. Аналогичные критериальные уравнения имеют место для W_y и W_z .

Исходя из критериальных уравнений критерии можно разделить на определяемые критерии – это критерии, в которые входят искомые зависимые переменные; в рассматриваемом случае зависимыми переменными являются $\alpha, \vartheta, w_x, w_y, w_z$ и p , следовательно, определяемыми являются критерии

Nu , Θ , W_x , W_y , W_z и Eu ; определяющие критерии – это критерии, которые целиком составлены из независимых переменных или постоянных величин, входящих в условия однозначности; в рассматриваемом случае определяющими являются критерии X , Y , Z , Re , Pe и Gr .

В зависимости от условий задачи определяющие критерии могут стать определяемыми и наоборот. Например, при свободной конвекции (без сопутствующего вынужденного движения) скорости являются величинами неизвестными (кроме значений вдали от тела и на стенке). В этом случае в критерий Re может быть введено только какое-либо неизвестное значение скорости (например, максимальное) и Re становится определяемым критерием.

Методы экспериментального определения коэффициентов теплоотдачи. Осреднение коэффициентов теплоотдачи

При постановке любого эксперимента всегда необходимо знать заранее: 1) какие величины надо измерять в опыте; 2) как обрабатывать результаты опыта; 3) какие явления подобны изучаемому, т. е. на какие явления можно распространить результаты опытов. На эти вопросы отвечает теория подобия: 1) в опытах нужно измерять все те величины, которые содержатся в критериях подобия изучаемого процесса; 2) результаты опытов необходимо обрабатывать в критериях подобия и зависимость между ними представлять в виде критериальных уравнений; 3) результаты опыта можно распространить на подобные явления, т.е. на качественно одинаковые явления, имеющие подобные условия однозначности и численно равные определяющие критерии.

Благодаря этим ответам теория подобия по существу является теорией эксперимента. Ее значение особенно велико для тех дисциплин, которые базируются на эксперименте. Именно таковым в большей своей части является учение о конвективном теплообмене. Кроме того, использование теории подобия при экспериментальном исследовании физических процессов формально позволяет уменьшить число переменных, от которых зависит изучаемое явление.

Экспериментальное исследование конвективного теплообмена большей частью сводится к нахождению коэффициентов теплоотдачи, которые по определению равны (см. [уравнение 10.1](#)):

$$\alpha \equiv \frac{dQ}{(t_c - t_{ж}) \cdot dF} = \frac{q}{t_c - t_{ж}}.$$

В опытах измеряют q , и t_c и рассчитывают коэффициент теплоотдачи. При расчете в выборе местных значений q и t_c обычно не возникает неопределенности; эти величины берутся на поверхности тела. Температура жидкости переменна по потоку, в то же время выбор ее расчетного значения законом Ньютона – Рихмана не предопределен. Поэтому приходится заранее указывать, какую температуру жидкости следует выбирать за расчетную: среднюю температуру жидкости по длине трубы, среднюю по сечению на входе в канал и т.д.

Плотность теплового потока также может определяться по-разному: из закона Фурье внутри твердого тела либо в жидкости. При течении в каналах тепловой поток часто определяют из уравнения теплового баланса:

$$dQ = G \cdot di = G \cdot c_p \cdot \delta t.$$

При электрическом обогреве плотность теплового потока может быть вычислена, если известны сила тока и омическое сопротивление нагревателя.

В общем случае коэффициент теплоотдачи может изменяться вдоль поверхности теплообмена. Для расчета теплопередачи обычно нужно знать среднее по поверхности значение коэффициента теплоотдачи.

Среднее может быть вычислено разными способами, в зависимости от того, например, от скольких переменных зависит коэффициент теплоотдачи, осреднять ли только сам коэффициент теплоотдачи или определить его как отношение среднего теплового потока к среднему температурному напору:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F} \int_0^{F_0} \alpha \cdot dF, \quad (11.9)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{\Delta \bar{t}} = \frac{\frac{1}{F} \int_0^{F_0} q \cdot dF}{\frac{1}{F} \int_0^{F_0} \Delta t \cdot dF} = \frac{\int_0^{F_0} q \cdot dF}{\int_0^{F_0} \Delta t \cdot dF}.$$

Как правило, тепловой поток или коэффициент теплоотдачи представляют в виде различных степенных зависимостей от координаты, которые дают разные средние значения. Кроме того, в первом случае необходимо вводить в расчет специально подобранный средний температурный напор, чтобы получить правильное значение плотности теплового потока.

Предпочтительным считается метод, использующий закон Ньютона-Рихмана (второй), но на практике используются оба.

Аналогично может быть осреднен критерий Нуссельта.

Вообще, если осреднение проведено по всей поверхности теплообмена, ни коэффициент теплоотдачи, ни критерий Нуссельта не будут зависеть от

координат. Если осреднение проведено на отдельных участках поверхности, то такие средние значения в общем случае могут изменяться от участка к участку.

Поскольку при конвективном теплообмене температура жидкости может изменяться как поперек, так и вдоль потока, осреднение температурного напора в ряде случаев становится достаточно сложной задачей.

Осреднение температуры жидкости по сечению.

Осреднение температуры жидкости и температурного напора по длине трубы

При наличии теплообмена температура жидкости в различных точках различна. Температура частиц жидкости, соприкасающихся со стенкой, будет равна температуре стенки, а температура частиц, текущих в центре канала, будет больше или меньше в зависимости от того, происходит охлаждение или нагревание жидкости. В промежуточных точках сечения температура будет изменяться между этими значениями, как правило, по параболическому закону.

Аналогично коэффициенту теплоотдачи можно провести осреднение температуры из уравнения теплового баланса как среднюю по энтальпии (по сечению):

$$\bar{t} = \frac{\int_0^{F_0} c_p \cdot \rho \cdot w \cdot t \cdot dF}{\int_0^{F_0} c_p \cdot \rho \cdot w \cdot dF} .$$

Среднюю по энтальпии температуру получить расчетным путем довольно трудно, но можно экспериментально. Для этого в канале нужно поставить какое-либо перемешивающее устройство, за которым температура будет выравниваться.

При теплообмене температура движущейся жидкости изменяется не только по сечению потока, но и вдоль по течению. Если необходимо вычислить среднюю по поверхности теплообмена плотность теплового потока, то в закон Ньютона – Рихмана подставляют средние значения расчетных величин.

Рассмотрим некоторые частные решения. Пусть плотность теплового потока – постоянная величина (электрообогрев), тогда средняя по сечению температура изменяется вдоль поверхности канала по линейному закону:

$$t = t' \pm \frac{q}{c_p G} F$$

и разницы между средним по поверхности и средним по энтальпии не будет.

Если коэффициент теплоотдачи изменяется вдоль поверхности теплообмена по степенному закону, средний температурный напор тоже изменяется по степенному закону.

Второй, часто встречающийся на практике случай – постоянная температура стенки (теплообмен при фазовом переходе). Для локального температурного напора введем обозначение $\vartheta = t - t_c$, тогда его изменение вдоль поверхности нагрева можно записать в следующем виде:

$$\vartheta'' = \vartheta' \exp\left(-\frac{\bar{\alpha}F_0}{c_p G}\right).$$

Таким образом, при постоянной температуре стенки температурный напор изменяется вдоль канала по экспоненциальному закону, при этом средний коэффициент теплоотдачи может быть функцией от поверхности теплообмена.

Для практических расчетов часто используется среднелогарифмический температурный напор, определяемый следующим выражением:

$$\Delta \bar{t}_л = \frac{t' - t''}{\ln \frac{t' - t_c}{t'' - t_c}}.$$

Если отношение температурных напоров на выходе и входе $\frac{\vartheta''}{\vartheta'} > 0,5$, то средняя температура жидкости может быть вычислена как средняя арифметическая между входом и выходом и в уравнениях теплоотдачи тогда используется среднеарифметический температурный напор: $|\Delta t_a| = |\bar{t}_a - \bar{t}_c|$.

Среднеарифметический температурный напор всегда больше среднелогарифмического.

Получение эмпирических критериальных уравнений. Определяющий размер. Определяющая температура

Приведенные выше формулы используются при первичной обработке результатов измерений процесса теплообмена.

Прежде чем обрабатывать опытные данные в критериях подобия, нужно установить, от каких определяющих критериев зависит определяемая величина. Для этого можно воспользоваться методом, описанным ранее. Составляется система дифференциальных уравнений, описывающих экспериментально изучаемый процесс, и формулируются условия однозначности. Затем математическое описание приводится к безразмерному виду, например:

$$Nu = f(Re, Pr).$$

По данным измерений подсчитываются значения Re и Pr и соответствующие им значения Nu .

Зависимость между критериями подобия обычно представляют в виде степенных функций, например:

$$\text{Nu} = c \text{Re}^n \text{Pr}^m,$$

где c , n и m являются постоянными безразмерными числами. Такого рода зависимости являются чисто эмпирическими. Они применимы лишь в тех пределах изменения аргумента, которые подтверждены опытом.

Экстраполяция этих зависимостей на большие или меньшие значения определяющих критериев, строго говоря, недопустима.

Предположим, что критерий Nu зависит только от критерия Re (или, что опыты проводились с теплоносителем, критерий Pr которого является постоянной величиной, не зависящей от температуры). В этом случае

$$\text{Nu} = c \text{Re}^n.$$

Логарифмируя последнее уравнение, получаем:

$$\lg \text{Nu} = \lg c + n \lg \text{Re}$$

или

$$Y = A + nX,$$

которое является уравнением прямой линии. Показатель степени n представляет собой тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс. Следовательно, значение n можно определить с помощью графического представления опытных данных в логарифмических координатах ([рис. 11.1, а](#)). Показатель степени:

$$n = \text{tg}\varphi = \frac{a}{b}.$$

Постоянная c определяется из уравнения $c = \text{Nu}/\text{Re}^n$, которому удовлетворяет любая точка прямой. Проверкой применимости степенной зависимости является тот факт, что в логарифмических координатах все точки укладываются на прямую. Если же опытные точки располагаются по кривой, то эту кривую обычно заменяют ломаной. Для отдельных участков такой кривой значения c и n различны.

В случае если искомая величина Nu является функцией двух аргументов, например, $\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr})$, на графике получается семейство прямых; второй аргумент берется в качестве параметра ([рис. 11.1, б](#)). Тогда по одной из прямых определяют показатель при числе Re , а затем опытные данные представляют на графике в виде зависимости $\lg \frac{\text{Nu}}{\text{Re}^n} = f(\lg \text{Pr})$. Из последнего графика определяют показатель степени m при критерии Pr , а затем по уравнению $c = \text{Nu}/(\text{Re}^n \text{Pr}^m)$ определяют значение коэффициента c . Аналогичным образом можно устанавливать и более сложные зависимости.

В последнее время все шире используется полуэмпирический метод получения формул. Зависимость между безразмерными переменными пред-

ставляется в виде функции, получаемой предварительно с точностью до постоянных величин из аналитического рассмотрения задачи. Постоянные величины определяются с помощью опытных данных. Такой путь получения формул является предпочтительным по сравнению с эмпирическим.

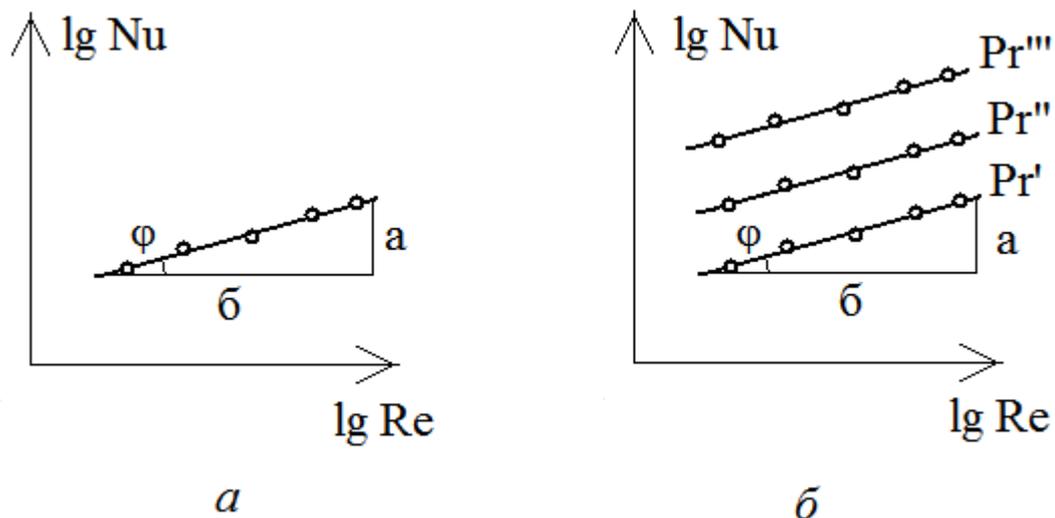


Рис. 11.1

Определяющий размер. В условия однозначности может входить несколько размеров. Определяющим считается тот, от которого процесс теплоотдачи зависит в наибольшей степени (обтекание пластины – ее длина, движение жидкости в длинной трубе – ее диаметр и т. д.). В ряде случаев (теплообмен при фазовых переходах) за линейный размер принимается комбинация разнородных физических величин, входящих в условия однозначности, которая имеет размерность линейной величины и пропорциональна какому-либо линейному размеру. При использовании критериальных уравнений всегда нужно обращать внимание на то, какой размер автор формулы ввел в критерии подобия в качестве определяющего. Неучет этого обстоятельства может привести к значительным ошибкам.

Определяющая температура. В критерии входят физические параметры жидкости. В процессе теплообмена температура жидкости меняется, следовательно, меняются и значения ее физических параметров. В истории развития теплопередачи было много противоречивых взглядов по этому вопросу. Соответствующим выбором определяющей температуры многие исследователи пытались получить более универсальные формулы. В качестве определяющей температуры использовались температура стенки, средняя температура жидкости, какая-либо из температур жидкости на входе или выходе (чаще первая) и целый ряд комбинаций из этих температур.

Однако экспериментальные и теоретические работы показывают, что нет такой универсальной определяющей температуры, в которой автоматически учитывалась бы зависимость теплоотдачи от изменения физических параметров. Поэтому в настоящее время считается, что за определяющую температуру следует принимать такую температуру, которая в технических рас-

четах бывает задана и легко может быть определена. Большое разнообразие способов выбора определяющей температуры требует особого внимания при пользовании эмпирическими формулами.

Контрольные вопросы

1. Какие процессы называются подобными, аналогичными? Приведите примеры.
2. Сформулируйте общие условия подобия физических процессов.
3. Поясните сущность каждого из условий подобия.
4. Что общего и в чем отличие условий подобия для систем дифференциальных уравнений, записанных в размерном и безразмерном виде?
5. Сформулируйте теорему Кирпичева – Гухмана.
6. Для каких физических явлений и при каких условиях могут быть получены критерии подобия?
7. Запишите систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена на примере движения жидкости в круглой горизонтальной трубе.
8. Дайте определение и приведите примеры определяющих и определяемых критериев.
9. Может ли определяемый критерий стать определяющим или наоборот? Приведите примеры.
10. Обоснуйте, почему теория подобия является теорией эксперимента?
11. Перечислите методы экспериментального определения и осреднения коэффициентов теплоотдачи.
12. Перечислите способы осреднения температуры жидкости.
13. По какому закону и почему меняется температура жидкости по длине поверхности нагрева в случае постоянной температуры стенки и постоянного теплового потока через нее?
14. Какие условия обеспечивает фазовый переход на поверхности нагрева или протекание через нее электрического тока?
15. Дайте определение среднеарифметического и среднелогарифмического температурных напоров. Величина какого из них больше и почему?
16. Каким образом формулируется зависимость определяемых критериев подобия от определяющих?
17. Каким методом получают значения постоянных в эмпирических критериальных уравнениях в случае зависимости от одного или от двух определяющих критериев подобия?
18. Поясните сущность понятий определяющий размер и определяющая температура.
19. Как выбирают определяющий размер и определяющую температуру для описания процессов конвективного теплообмена?

Лекция 12. Теплообмен при свободной конвекции в большом объеме около вертикальных поверхностей

Общие сведения о свободной конвекции. Число Релея. Теплоотдача при свободной конвекции жидкости около вертикальной пластины или вертикальной трубы.

Общие сведения о свободной конвекции. Число Релея

Вынужденное движение происходит под действием сил, приложенных к жидкости вне рассматриваемой системы. Например, движение жидкости по трубам происходит за счет перепада давления, создаваемого насосом. Свободное движение возникает за счет массовых (объемных) сил, приложенных к частицам жидкости внутри системы. Такими силами являются сила тяжести, центробежная сила и некоторые другие. Наиболее хорошо изучено свободное движение жидкости, вызванное гравитационными силами (термогравитационная конвекция в неравномерно нагретой жидкости).

В уравнении движения $\rho \frac{D\vec{w}}{dt} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{w}$ гравитационные силы учитываются членом $\rho \cdot \vec{g}$, имеющим размерность силы, отнесенной к единице объема. При теплообмене температура жидкости переменна. Поэтому возникает разность плотностей и, как следствие, разность гравитационных сил, представляющая собой подъемную (опускную) силу. Работу по перемешиванию жидкости совершает сила тяжести. В технических задачах ускорение силы тяжести от точки к точке рассматриваемого пространства практически не изменяется. Здесь мы будем рассматривать теплоотдачу только при свободном гравитационном движении.

Скорость свободного движения жидкости определим из закона сохранения механической энергии (уравнения Бернулли):

$$\frac{\rho w_0^2}{2} + \rho gh = \rho_0 gh ,$$

откуда следует, что характерная скорость свободной конвекции

$$w_0 = \sqrt{2gh \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}} .$$

Будем считать, что физические параметры жидкости постоянны, кроме плотности, которая является линейной функцией температуры $\rho = \rho_0(1 - \beta\vartheta)$ или $\rho - \rho_0 = -\rho\beta\vartheta$. Тогда

$$w_0 = \sqrt{2g\beta\vartheta h} \quad (12.1)$$

Для воздуха при $t = 20^\circ\text{C}$, $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ и $h = 0,5$ м имеем $w_0 = 0,8$ м/с. Действительная скорость (ее максимальное значение в пограничном слое около вертикальной стенки) будет меньше (приблизительно 0,06 м/с), что объясняется неучетом сил трения при оценке скорости конвекции, а также более сложным характером движения воздуха внутри слоя.

Будем рассматривать свободное гравитационное течение только для наиболее простых геометрических форм поверхности твердого тела (вертикальная плита, горизонтальный цилиндр). Предполагается, что объем жидкости настолько велик, что свободное движение, возникающее у других тел, расположенных в этом объеме, не сказывается на рассматриваемом течении. Как и при вынужденной конвекции, свободное движение жидкости может быть как ламинарным, так и турбулентным (рис. 12.1), а также около поверхности (например, вертикальной трубы или стенки) образуется пограничный слой.

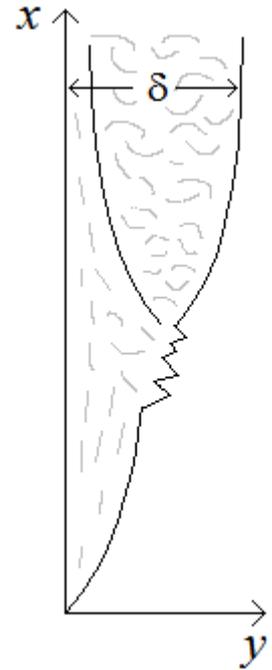


Рис. 12.1

Вначале толщина слоя и скорость воздуха малы, течение ламинарное. Коэффициент теплоотдачи в этой области по мере продвижения вверх уменьшается. Далее струйки воздуха испытывают поперечные колебания и течение становится волновым, а затем упорядоченное движение нарушается, образующиеся вихри отрываются от поверхности, возникает турбулентное течение воздуха.

Характер изменения температуры и скорости, типичный для пограничного слоя при свободной конвекции жидкости около тела, находящегося в большом объеме жидкости, показан на рис. 12.2. При свободной конвекции тепловой и динамический пограничные слои взаимосвязаны и их следует рассматривать совместно. Для ламинарного пограничного слоя справедлива зависимость [5]

$$\text{Nu}_x = F(\text{Pr}) \cdot \sqrt{\text{Re}_x} \quad (12.2)$$

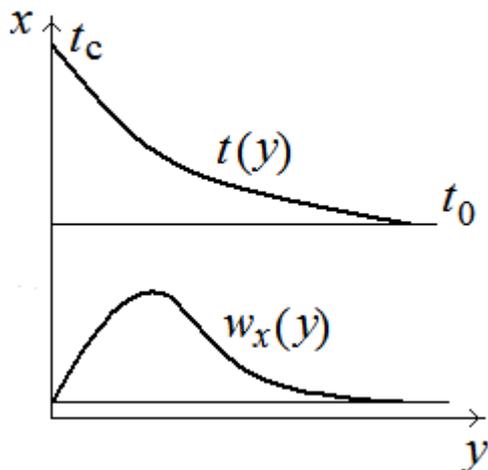


Рис. 12.2

При свободной конвекции в случае постоянной температуры стенки скорость вынужденного движения следует заменить на скорость свободной конвекции (12.1), при этом

$$\begin{aligned} \text{Re}_x &= \frac{w_0 x}{\nu} = \frac{\sqrt{g\beta\vartheta x x}}{\nu} = \\ &= \left(\frac{g\beta\vartheta x^3}{\nu^2} \right)^{1/2} = \text{Gr}_x^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (12.2) запишем как

$$\text{Nu}_x = F(\text{Pr}) \cdot \sqrt{\text{Re}_x} = F(\text{Pr}) \cdot \text{Gr}_x^{1/4}.$$

Если задан постоянный тепловой поток в стенке $q_c = \text{const}$, то $\Delta T = q / \alpha$, поэтому $\alpha \sim x^{-1/5}$, а число Грасгофа определяется как

$$\text{Gr}_{q,x} = \frac{g\beta q_c x^4}{\nu^2 \lambda}.$$

Для описания свободной конвекции жидкости используется безразмерный комплекс, полученный произведением чисел Грасгофа и Прандтля, который называется числом Релея:

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{g\beta\vartheta l_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{a} = \frac{g\beta\vartheta l_0^3}{\nu a}.$$

Теплоотдача при свободной конвекции жидкости около вертикальной пластины или вертикальной трубы

Пусть вертикальная пластина (труба) с неизменной температурой поверхности, равной t_c , находится в жидкости или газе (см. рис. 12.1). Вдали от пластины (трубы) жидкость неподвижна (вынужденное течение отсутствует), а ее температура вдали от пластины (трубы) постоянна и равна t_0 . Для простоты вычислений примем, что $t_c > t_0$ (однако полученные результаты будут справедливы и для обратного соотношения температур). При этом у пластины (трубы) появляется подъемное движение нагретого слоя жидкости. Вдали от пластины (трубы) скорость по-прежнему равна нулю.

Расположим начало координат у нижней кромки пластины (трубы); ось x направим вдоль пластины (трубы), ось y – нормально к поверхности пластины (трубы). Будем полагать, что пластина вдоль оси z бесконечна. Процесс стационарный.

В случае вынужденного движения жидкости при обтекании пластины, а также при свободном движении в случае $Gr_x \rightarrow \infty$ (или $Ra_x \rightarrow \infty$) справедлива теория пограничного слоя, в то время как при малых значениях Gr_x (или Ra_x) необходимо численно решать полную систему уравнений конвективного теплообмена. Результаты расчета сравнивают с экспериментальными данными, уточняют решение и получают формулы, пригодные для практического использования.

При свободной конвекции поле температуры и поле скорости зависят друг от друга, поэтому уравнения конвективного теплообмена рассматриваются совместно. Запишем уравнения пограничного слоя:

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2},$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = g\beta\vartheta + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0.$$

Польгаузен преобразовал уравнения пограничного слоя к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые решаются численно [5]. Из результатов расчета числа Нуссельта следует, что

$$Nu_x = F(Pr) \cdot Ra_x^{1/4},$$

где

$$F(Pr) = 0,6 \left(\frac{Pr}{1 + 2Pr^{1/2} + 2Pr} \right)^{1/4}.$$

Полученную зависимость можно рекомендовать для расчета местного коэффициента теплоотдачи α в диапазоне $10^5 < Gr_x < 10^8$ при постоянной температуре стенки.

Средний коэффициент теплоотдачи получаем из определения среднего:

$$\text{Nu}_l = \frac{4}{3} \text{Nu}_{x=l}.$$

Все значения физических свойств выбираются при температуре граничного слоя.

При постоянном тепловом потоке $q_c = \text{const}$ коэффициент теплоотдачи выше на 10–15 %, чем при постоянной температуре стенки. Число Релея определяют по формуле

$$\text{Ra}_{q,x} = \frac{g \beta q_c x^4}{\nu^2 \lambda} \text{Pr}.$$

Местный коэффициент теплоотдачи определяем из критериального уравнения

$$\text{Nu}_x = 0,615 \left(\frac{\text{Pr}}{0,8 + \text{Pr}} \right)^{1/5} \cdot \text{Ra}_x^{1/5},$$

а средний коэффициент теплоотдачи – из критериального уравнения

$$\text{Nu}_l = 1,22 \text{Nu}_{x=l}.$$

Определяющая температура, как и в предыдущем случае, – температура граничного слоя, формулы справедливы при $\text{Ra}_x < 5 \cdot 10^{10}$ и $0,1 < \text{Pr} < 100$.

Для турбулентного пограничного слоя коэффициент теплоотдачи практически не зависит от граничных условий и не зависит от координаты x :

$$\text{Nu}_x = C \cdot \text{Ra}_x^{1/3},$$

где согласно опытным данным $C = 0,115 \dots 0,15$.

Для практических расчетов необходимо определять средний коэффициент теплоотдачи. В случае, когда на пластине (трубе) существуют ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения в пограничном слое, средний коэффициент теплоотдачи при постоянной температуре стенки определяется следующим образом [5]:

$$\text{Nu}_l^{1/2} = 0,825 + \frac{0,387 \text{Ra}^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \right]^{8/27}}.$$

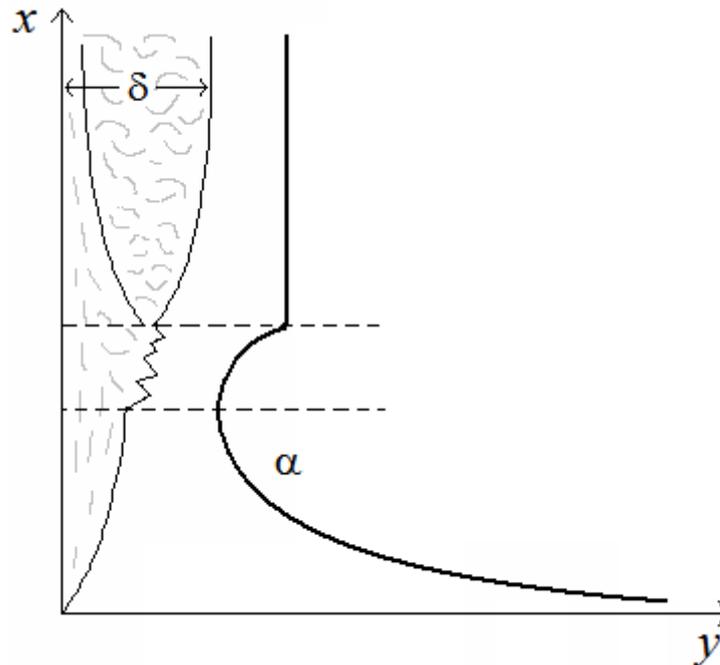


Рис. 12.3

На [рис. 12.3](#) показаны толщина пограничного слоя и коэффициент теплоотдачи в зависимости от высоты стенки для восходящего потока жидкости.

Контрольные вопросы

1. Под действием каких сил возникает свободное движение жидкости? В каком случае движение жидкости будет восходящим или нисходящим?
2. Чем отличается свободное движение жидкости в большом объеме от свободного движения в ограниченном пространстве? Как это влияет на теплоотдачу?
3. Перечислите упрощающие предположения и запишите систему дифференциальных уравнений для описания свободного ламинарного течения жидкости в большом объеме вдоль вертикальной пластины.
4. Какой закон принимается для изменения температурного напора в пределах теплового пограничного слоя? Почему и где он отличается от действительного распределения?
5. Запишите критериальные уравнения для определения местного и среднего коэффициентов теплоотдачи при свободном ламинарном течении жидкости в большом объеме вдоль вертикальной стенки?
6. Для чего в критериальное уравнение вводится поправка Михеева? Запишите ее выражение.
7. Какими критериями подобия характеризуется теплоотдача при свободном движении жидкости? Запишите их выражения и поясните физический смысл.

Лекция 13.

Свободная конвекция около горизонтальных поверхностей. Свободная конвекция в ограниченном пространстве

Теплоотдача при свободной конвекции около горизонтальной пластины. Теплоотдача при свободной конвекции на поверхности горизонтального цилиндра. Теплоотдача при малых значениях числа Релея. Свободная конвекция в прослойках и замкнутых полостях. Эквивалентный коэффициент теплопроводности.

Теплоотдача при свободной конвекции около горизонтальной пластины

Пластина (или плита) может быть обращена теплоотдающей поверхностью вверх или вниз. Для оценочных расчетов можно использовать формулы для вертикальной пластины, характерным размером является меньший, при этом если теплоотдающая поверхность обращена вверх, то коэффициент теплоотдачи увеличивается на 30 %, а если теплоотдающая поверхность обращена вниз – уменьшается на 30 %.

Более точные результаты можно получить для среднего коэффициента теплоотдачи горизонтальной пластины с теплоотдающей поверхностью, обращенной вверх, при постоянной температуре поверхности [5]:

при $Ra \leq 10^5$

$$Nu_l = \frac{0,766 Ra^{1/5}}{\left[1 + \left(\frac{0,322}{Pr}\right)^{11/20}\right]^{4/11}},$$

при $Ra > 10^5$

$$Nu_l = \frac{0,15 Ra^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0,322}{Pr}\right)^{11/20}\right]^{20/33}}.$$

Здесь определяющим размером является отношение площади пластины к ее периметру, а определяющей температурой – температура граничного слоя.

Для воздуха формулы упрощаются:

при $Ra \leq 10^5$



$$Nu_l = 1,10 Ra^{1/5},$$

при $Ra > 10^5$

$$Nu_l = 0,203 Ra^{1/3}.$$

Теплоотдача при свободной конвекции на поверхности горизонтального цилиндра

Описанное выше поведение жидкости у вертикальной пластины типично также для наклонных пластин, круглых и овальных труб, в том числе и горизонтальных. Наиболее интересный (распространенный) случай – горизонтальная труба с круглым сечением. Характер течения у таких труб представлен на [рис. 13.1](#), из которого следует, что при прочих равных условиях чем больше диаметр трубы, тем вероятнее разрушение ламинарного течения. У труб малого диаметра разрушение ламинарного течения может происходить вдали от трубы [5, 18].

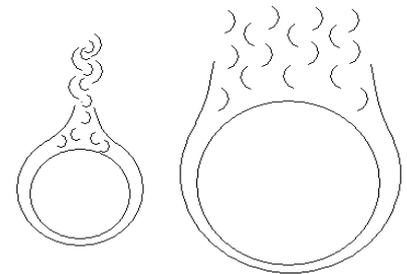


Рис. 13.1

Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи применима формула

$$Nu = \frac{2}{\ln(1 + 2 / Nu')},$$

где

$$Nu' = \frac{\alpha' d}{\lambda} = 0,518 Ra^{1/4} \left[1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{3/5} \right]^{-5/12},$$

в которой определяющей температурой является температура граничного слоя, определяющим размером – диаметр трубы.

Для воздуха формула имеет вид

$$Nu = \frac{2}{\ln \left(1 + \frac{2}{0,399 Ra^{1/4}} \right)}.$$

Теплоотдача при малых значениях числа Релея

В эксперименте было обнаружено, что для тонких проволочек ($d=0,2 - 1$ мм) условия теплоотдачи своеобразны. Так как поверхность проволоки мала, то и количество передаваемого тепла незначительно. При малых температурных напорах вокруг проволочки образуется неподвижная пленка нагретого воздуха. Этот режим называется пленочным, он обнаружен при $Ra < 1$, где определяющей будет температура граничного слоя $t_r=0,5(t_{ж}+t_c)$. При этом режиме $Nu_{rd} = 0,5$, следовательно, $\alpha = 0,5 \lambda / d$. Теплообмен осуществляется теплопроводностью, режим неустойчив.

При $Ra < 500$ имеет место переходный режим, который описывается уравнением [18]

$$Nu_{rd} = 1,18 Ra_r^{1/8}.$$

Свободная конвекция в прослойках и замкнутых полостях. Эквивалентный коэффициент теплопроводности

В предыдущих разделах были рассмотрены случаи теплообмена при естественной конвекции в большом (неограниченном) пространстве. В этих условиях процессы нагревания и охлаждения жидкости протекают на значительном расстоянии, а восходящие и нисходящие токи не оказывают сколько-нибудь заметного влияния друг на друга. В ограниченном объеме толщина пограничного слоя становится соизмеримой с размерами самого пространства и процессы нагревания и охлаждения нельзя рассматривать независимо.

Если объем жидкости невелик, то свободные движения, возникающие у других тел или частей данного тела, расположенных в этом объеме, могут сказываться на рассматриваемом течении. Разделить эти движения и рассматривать их по отдельности очень трудно, а порою и невозможно. Движение и теплоотдача зависят при этом как от рода жидкости, ее температуры и температурного напора, так и от формы и размеров пространства.

Процессы теплообмена при естественной конвекции в ограниченном пространстве встречаются в ряде технических приложений. С этими процессами связаны: теплоизоляция трубопроводов, зданий, печей и емкостей с помощью газовых прослоек; формирование температурных полей и перенос теплоты в отсеках и баках сверхзвуковых самолетов, ракет и космических летательных аппаратов; теплообмен в радиоэлектронных устройствах; перенос теплоты в пористых телах и средах. Процессы теплообмена при естественной конвекции имеют практическое значение в геодезии, когда приходится иметь

дело с нагретыми жидкостями, остающимися в замкнутом пространстве, а также в криогенной технике при длительном хранении сжиженных газов.

В горизонтальных щелях, образованных двумя плоскими стенками, процесс определяется расположением нагретых и холодных поверхностей и расстоянием между ними. Свободное течение жидкости отсутствует, если температура верхней стенки больше температуры нижней. В этом случае тепло передается от верхней стенки к нижней теплопроводностью или излучением. Температуры жидкости постоянны в горизонтальных слоях (рис. 13.2), возрастая в вертикальном направлении. Все это справедливо для жидкостей, у которых плотность уменьшается с увеличением температуры. Если температура нижней стенки больше, чем температура верхней, то при определенных условиях в щели возникают конвекционные токи (рис. 13.3). Горячие частицы жидкости, имеющие меньшую плотность, стремятся переместиться вверх. В щели появляются восходящие и нисходящие потоки, чередующиеся между собой. Поле потока имеет ячеистую структуру с более или менее правильными шестигранными ячейками, которые называются ячейками Бенара. Такое течение имеет место до тех пор, пока не наступит беспорядочное турбулентное течение.

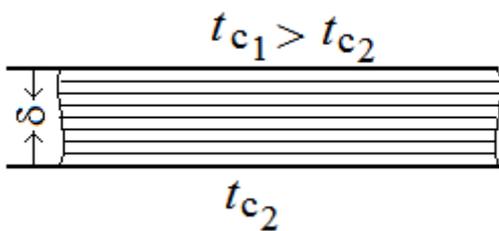


Рис. 13.2

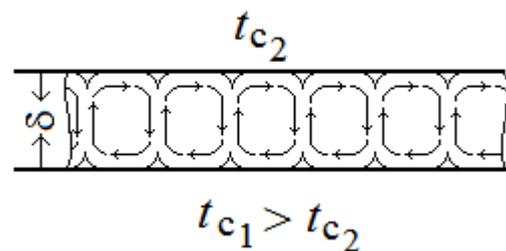


Рис. 13.3

По данным работы Шмидта при $1700 < Ra < 3 \cdot 10^3$ свободная конвекция описывается критериальным уравнением [32]

$$Nu = 0,0012 \cdot Ra^{0,9}.$$

При возникновении конвекции жидкость поднимается в центре ячейки и опускается на ее периферии. В опытах с воздухом наблюдается противоположная по направлению картина течения. Эти особенности связаны с различным характером зависимости вязкости от температуры для жидкостей и газов. Вязкость газов растет с повышением температуры, в то время как у жидкостей эта зависимость является обратной. Направление распространения начальных возмущений при возникновении конвекции, в свою очередь, зависит от того, как изменяется вязкость внутри слоя.

Режим развитой ламинарной конвекции наступает при более высоких значениях Ra . Для диапазона $3 \cdot 10^3 < Ra < 2,5 \cdot 10^4$ теплоотдача описывается следующим уравнением [32]:

$$Nu = 0,24 \cdot Ra^{0,25} .$$

В этом диапазоне числа Ra при соблюдении изотермичности границ может существовать двухмерная структура течения в виде чередующихся длинных валов, оси симметрии которых параллельны стенкам щели. При этом по мере увеличения значения комплекса Ra отношение периода чередующихся восходящих и нисходящих токов к толщине слоя увеличивается от 2 до 2,8.

При более высоких значениях комплекса Ra течение становится трехмерным и появляются признаки перехода к турбулентному режиму [32]. В диапазоне $2,5 \cdot 10^4 < Ra < 3 \cdot 10^4$ справедлива следующая формула:

$$Nu = 0,3 \cdot Gr^{0,16} Pr^{0,21} .$$

При $Ra > 3 \cdot 10^4$

$$Nu = 0,1 \cdot Gr^{0,31} Pr^{0,36} .$$

Оптические измерения показали, что турбулентный режим в длинном горизонтальном слое жидкости появляется при $Ra > 5 \cdot 10^4$.

Во всех представленных формулах число Грасгофа определяется следующим образом:

$$Gr = \frac{g\beta\delta^3}{\nu^2} \cdot (t_{c1} - t_{c2}) ,$$

где характерный размер δ – толщина прослойки, а физические свойства среды отнесены к средней температуре в прослойке $t_{c.г} = 0,5(t_{c1} + t_{c2})$.

Приведенные выше формулы справедливы для длинных горизонтальных слоев, подогреваемых снизу. Для слоев ограниченной протяженности наличие боковых стенок приводит к увеличению значения комплекса Ra , определяющего условия возникновения конвекции. Благодаря влиянию боковых стенок интенсивность переноса теплоты через слой понижается.

В вертикальных щелях в зависимости от расстояния между стенками δ циркуляция жидкости может протекать по-разному. Если расстояние велико, то восходящий и нисходящий потоки движутся без взаимных помех. В этом случае движение имеет такой же характер, как и в неограниченном объеме. Если же расстояние между стенками мало, то вследствие взаимных помех возникают внутренние циркуляционные контуры (рис. 13.4). Высота контуров h определяется шириной щели, родом жидкости и интенсивностью процесса. При определенных условиях перенос тепла между стенками может быть вычислен по уравнениям теплопроводности. Отклонения имеют место только на концах щели, на высоте, равной примерно расстоянию между стенками. При практических расчетах обычно необходимо определить тепловой поток через слой жидкости. В расчетной практике принято заменять сложный процесс переноса тепла через щели эквивалентным процессом теплопроводности $q = \frac{\lambda_{\text{эКВ}}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2})$, где δ – толщина щели; t_{c1} и

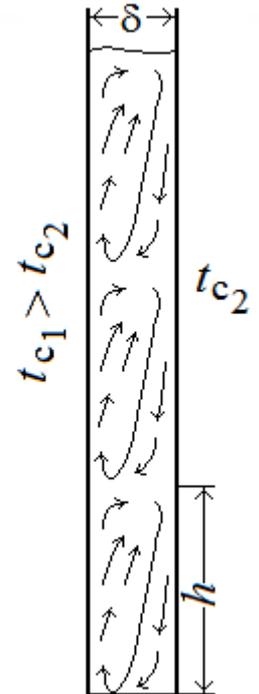


Рис 13.4

t_{c2} – температуры поверхностей; $\lambda_{\text{эКВ}}$ – эквивалентный коэффициент теплопроводности, который может быть вычислен по формуле $\lambda_{\text{эКВ}} = \lambda \varepsilon_{\text{эКВ}}$, где λ – действительный коэффициент теплопроводности жидкости в щели; $\varepsilon_{\text{эКВ}}$ – коэффициент конвекции, вычисляемый приближенно по формуле $\varepsilon_{\text{эКВ}} = 0,18 Ra_{\text{сГ}}^{0,25}$ [18]. Все физические параметры выбираются при определяющей температуре $t_{\text{с.Г}} = 0,5(t_{c1} + t_{c2})$.

Контрольные вопросы

1. Перечислите случаи свободного движения жидкости в большом объеме.
2. Какими критериальными уравнениями описывается теплоотдача при свободном движении жидкости в большом объеме?
3. Укажите зависимость коэффициента теплоотдачи при свободном движении жидкости вдоль вертикальной стенки от ее высоты.
4. Укажите диапазон значений числа Ra, при котором имеет место смешанный режим течения в пограничном слое в случае свободного движения жидкости вдоль вертикальной стенки.
5. Поясните особенности теплоотдачи и запишите критериальное уравнение для свободной конвекции около горизонтальных труб.
6. В каком случае теплоотдача при свободной конвекции описывается постоянным значением числа Нуссельта?

7. В каком случае при свободном движении жидкости в горизонтальной прослойке может возникнуть ячеистая структура восходящих и нисходящих токов жидкости?
8. При каких значениях числа Ra наступает турбулентное течение жидкости в горизонтальной прослойке?
9. Какой тепловой процесс считается преобладающим в случае свободного движения жидкости в ограниченном пространстве? Как определить тепловой поток в этом случае?
10. Запишите выражение для поправки к коэффициенту теплопроводности в случае свободного движения жидкости в вертикальных щелях?

Лекция 14.

Теплоотдача при вынужденном продольном омывании плоской поверхности

Зависимость теплоотдачи от режима течения жидкости. Ламинарный пограничный слой при обтекании пластины. Задача Блаузиуса. Тепловой пограничный слой при обтекании пластины. Задача Польшаузена. Зависимость теплоотдачи от изменения физических параметров жидкости. Интегральное соотношение Крусиллина. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое.

Зависимость теплоотдачи от режима течения жидкости. Ламинарный пограничный слой при обтекании пластины. Задача Блаузиуса

Для простоты будем предполагать, что плоская поверхность омывается потоком жидкости ([рис. 14.1](#)), скорость и температура которой вдали от твердого тела постоянны и равны, соответственно, w_0 и t_0 . Поток параллелен поверхности пластины. Около поверхности пластины образуется гидродинамический пограничный слой, в пределах которого скорость жидкости изменяется от нуля до скорости невозмущенного потока. Течение в пограничном слое может быть как ламинарным (1), так и турбулентным (3). Однако и при турбулентном режиме течения у поверхности стенки образуется вязкий под-слой с ламинарным режимом течения.

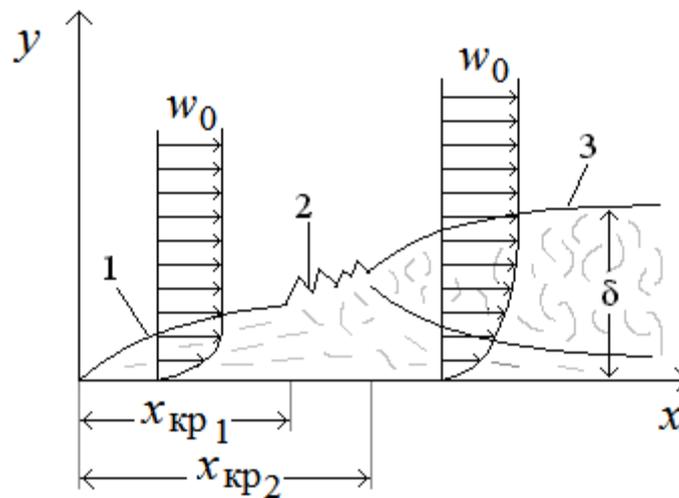


Рис. 14.1

Переход из ламинарной формы течения в турбулентную происходит не в точке, а на некотором участке (2), в пределах которого течение имеет неустойчивый характер и называется переходным.

Законы теплообмена в ламинарном погранслое и в турбулентном погранслое различны (перенос тепла в ламинарном погранслое осуществляется только теплопроводностью, а в турбулентном погранслое добавляется конвекция), поэтому большое значение имеет определение границ слоев. О форме течения судят по критической величине $Re = \frac{w_0 \cdot x}{\nu}$, где x – длина вдоль

пластины, отсчитываемая от кромки. Опыты показывают, что переход происходит при значениях числа Рейнольдса от 10^4 до $4 \cdot 10^6$. Кроме того, на координату начала разрушения ламинарного пограничного слоя влияет степень турбулентности набегающего потока, определение которой представляет значительные трудности, так как эта величина зависит от множества факторов, поэтому принята приближенная граница режимов течения – $Re=10^5$.

При наличии теплообмена у поверхности пластины, кроме гидродинамического, образуется также и тепловой пограничный слой.

Для пограничного слоя система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена может быть существенно упрощена. Эта система уравнений получается из уравнений Навье – Стокса и носит название уравнений Прандтля. Она получена для несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами, при этом полагается, что выделение теплоты вследствие трения практически не сказывается на изменении энтальпии жидкости.

При ламинарном обтекании бесконечной плоской пластины скорости в пограничном слое вдоль потока и поперек него, а также коэффициент трения определяются из решения задачи Блаузиуса. Кроме того, в процессе решения этой задачи получаем выражение для толщины погранслоя от координаты [5]:

$$\delta = \eta \sqrt{\frac{v \cdot x}{w_0}},$$

где $\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}}$ – безразмерная переменная Блаузиуса.

Влияние режима течения жидкости в пограничном слое на теплоотдачу заключается в различии механизмов переноса теплоты. В ламинарном пограничном слое теплота поперек слоя переносится только теплопроводностью, а в турбулентном погранслое кроме теплопроводности дополнительно возникает конвективный перенос теплоты за счет турбулентных пульсаций.

**Тепловой пограничный слой при обтекании пластины.
Задача Польшауэна. Зависимость теплоотдачи
от изменения физических параметров жидкости**

Будем рассматривать плоский пограничный слой ([рис. 14.1](#)). Предположим, что температура набегающего потока T_0 больше, чем температура поверхности тела T_c . Температурное поле в пограничном слое находится в результате решения стационарного уравнения энергии, записанного для безразмерного температурного напора $\Theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_c}$ [5]:

$$w_x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}.$$

Граничные условия:

- 1) вдали от тела при $y \rightarrow \infty$ $\Theta = 0$;
- 2) на поверхности тела при $y=0$ $\Theta = 1$.

Поставленная задача была решена Э. Польшауэном (1921 г.). Уравнение энергии преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение, если производные, входящие в него, выразить через производные по переменной η и учесть вытекающие из решения гидродинамической задачи Блаузиуса соотношения для скоростей. В результате получается дифференциальное уравнение

$$\Theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} \varphi \Theta' = 0,$$

где φ – такая функция, что $\varphi'(\eta) = v_x / v_0$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$\Theta = 1 - \frac{\int_0^{\eta} (\varphi'')^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^{\infty} (\varphi'')^{\text{Pr}} d\eta} .$$

Результаты вычисления в графической форме приведены на [рис. 14.2](#).

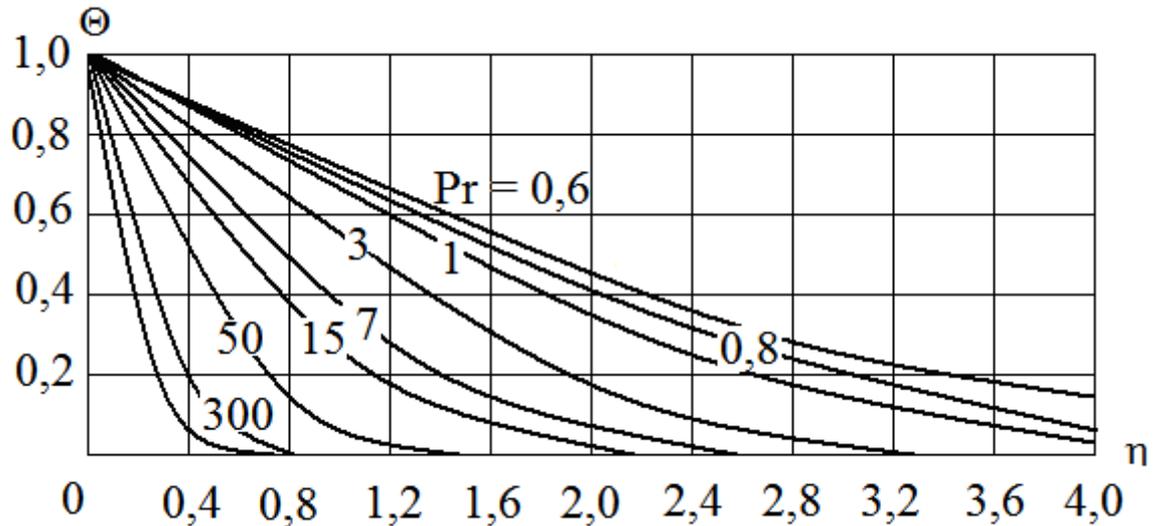


Рис. 14.2

Для местного числа Нуссельта получаем:

$$\text{Nu}_x = F(\text{Pr}) \cdot \sqrt{\text{Re}_x} .$$

Для чисел Прандтля $0,6 \leq \text{Pr} \leq 50$ получена формула, аппроксимирующая результаты вычислений $F(\text{Pr})$:

$$\text{Nu}_x = 0,33 \cdot \sqrt{\text{Re}_x} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}} .$$

В этом случае $\frac{k}{\delta} = \frac{1}{\text{Pr}^{1/3}}$. Кроме того, приведенная формула для числа

Нуссельта справедлива для жидкости с постоянными свойствами при постоянной температуре пластины $T_c = \text{const}$. Если перепады температуры в пограничном слое невелики, то в первом приближении свойства жидкости можно считать постоянными и относить их к температуре T_r – равной средней температуре пограничного слоя $T_r = 0,5 (T_0 + T_c)$.

Таким образом, было получено, что местный коэффициент теплоотдачи является функцией скорости, линейного размера и физических параметров:

теплопроводности, кинематической вязкости и температуропроводности, – которые, в свою очередь, являются функцией температуры. Поэтому, кроме индекса « x », указывающего, какой линейный размер является характерным (здесь текущая координата, отсчитываемая от передней кромки пластины), следует указывать температуру, при которой должны быть взяты физические параметры. Индекс « $ж$ » соответствует температуре жидкости, индекс « $с$ » – температуре стенки. Кроме того, из опыта получено, что критерий Нуссельта зависит еще и от направления теплового потока, т. е. нагревается или остывает жидкость. Для преодоления этой проблемы в формулу вводится поправка на переменность физических параметров в поперечном сечении потока, носящая имя А.В. Михеева, представляющая собой степенную зависимость отношения чисел Прандтля, взятых при температуре жидкости в центре потока и при температуре стенки $(Pr_{ж}/Pr_{с})^{0,25}$. Эта поправка необходима для расчета теплоотдачи при течении капельных жидкостей. Для газов она неприменима.

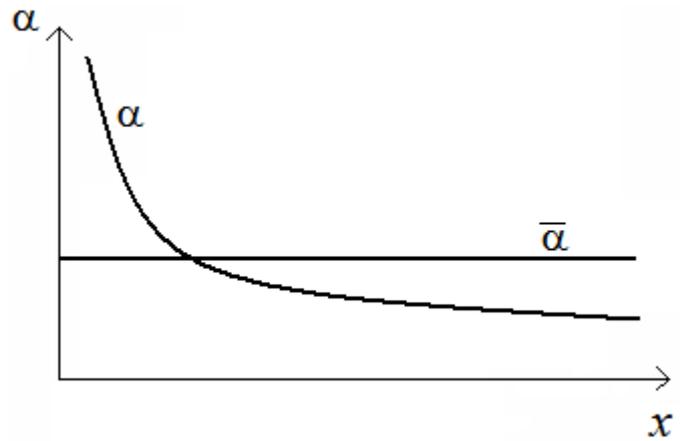


Рис 14.3

Тогда местный коэффициент теплоотдачи при ламинарном продольном обтекании плоской пластины (для чисел Рейнольдса, меньших 10^5) со значительным перепадом температуры в пределах пограничного слоя определяется следующим выражением [18]:

$$Nu_{xж} = 0,33 \cdot \sqrt{Re_{xж}} \cdot \sqrt[3]{Pr_{ж}} \cdot (Pr_{ж}/Pr_{с})^{0,25}.$$

Средний по длине пластины коэффициент теплоотдачи определяется из выражения [18]

$$Nu_{lж} = 0,67 \cdot \sqrt{Re_{lж}} \cdot \sqrt[3]{Pr_{ж}} \cdot (Pr_{ж}/Pr_{с})^{0,25}.$$

Он равен удвоенному местному, взятому по длине пластины. Это следует из определения среднего коэффициента теплоотдачи (уравнение (13.1)).

Графически зависимости местного и среднего коэффициентов теплоотдачи от координаты представлены на рис. 14.3. При $x = 0$ получаем $\alpha \rightarrow \infty$. Это связано с тем, что в этой точке температурный напор конечен и равен ϑ_0 , а градиент температуры стремится к бесконечности.

Теоретическое решение задачи о теплообмене при продольном обтекании пластины в случае постоянного теплового потока в стенке $q_c = \text{const}$ приводит к следующему выражению для местного коэффициента теплоотдачи (свойства жидкости относят к температуре граничного слоя):

$$\text{Nu}_x = 0,46 \cdot \sqrt{\text{Re}_x} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}} .$$

Интегральное соотношение Кружилина

В сложных случаях тепломассообмена (обтекание тела при сложном изменении скорости внешнего потока, вдувание охлаждающего газа через пористую стенку и др.) применяется приближенный метод расчета коэффициента теплоотдачи и сопротивления трения. В основе метода, называемого «интегральным», лежат обыкновенные дифференциальные уравнения (интегральные соотношения), которые можно получить, проинтегрировав по толщине пограничного слоя уравнения движения и энергии. Интегральное соотношение импульсов получено Т. Карманом в 1921 г., а интегральное уравнение теплового потока впервые было дано Г.Н. Кружилиным в 1936 г.

С помощью двух сечений, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , выделим в тепловом пограничном слое бесконечно малый объем V (рис. 14.4).

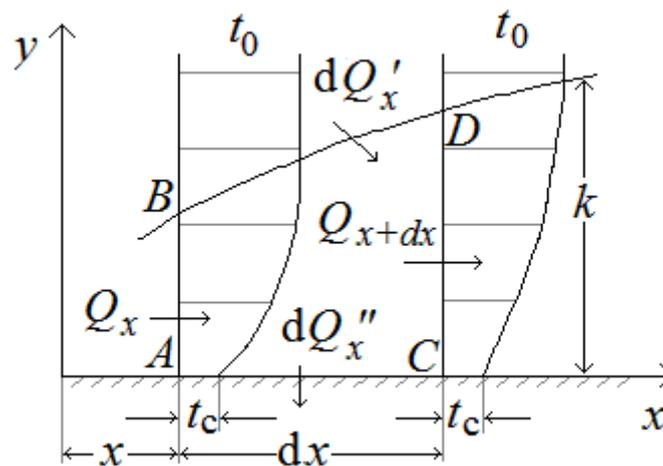


Рис. 14.4

Поверхность этого объема будет являться контрольной поверхностью. Плоскости, ограничивающие этот объем параллельно поверхности чертежа, находятся на расстоянии единицы друг от друга. Запишем уравнение теплового баланса (уравнение энергии):

$$\rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p w_y \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial q}{\partial x} .$$

В результате интегрирования этого уравнения и некоторых преобразований получим интегральное соотношение Кружилина [18]:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^k (T_0 - T) \cdot w_x \cdot dy \right) = \frac{q_c}{\rho \cdot c_p}$$

Теплоотдача при турбулентном пограничном слое

Турбулентное течение жидкости характеризуется более заполненным профилем скорости, основное изменение скорости сосредоточено в ламинарном вязком подслое. Кроме того, из-за турбулентных пульсаций тепло переносится макроскопическими частицами жидкости, перемещающимися в поперечном направлении. Как и в случае профиля скорости, профиль температуры здесь тоже значительно отличается от параболического, он также более заполнен.

Перемешивание жидкости свидетельствует о том, что в поперечном направлении тепло переносится не только теплопроводностью, но и конвекцией, поэтому коэффициент теплоотдачи должен быть выше, чем при ламинарном обтекании пластины. Теоретические расчеты теплообмена в турбулентном пограничном слое при обтекании пластины проводились многими авторами. Было получено, что для практических расчетов числа Нуссельта при числах Рейнольдса, больших 10^5 , и числах Прандля, больших 0,6, можно использовать формулу [5]

$$Nu_x = 0,0296 \cdot Re_x^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \cdot \epsilon_T$$

При определении чисел подобия физические свойства выбираются по температуре невозмущенного потока. Для капельных жидкостей

$$\epsilon_T = \left(\frac{\mu_c}{\mu_{ж}} \right)^{-0,11} \quad \text{при нагревании,} \quad \epsilon_T = \left(\frac{\mu_c}{\mu_{ж}} \right)^{-0,25} \quad \text{при охлаждении; для газов}$$

$$\epsilon_T = \left(\frac{T_c}{T_{ж}} \right)^{-0,36} \quad \text{при нагревании,} \quad \epsilon_T = \left(\frac{T_c}{T_{ж}} \right)^{-0,5} \quad \text{при охлаждении.}$$

Для приближенных расчетов коэффициента теплоотдачи местный коэффициент теплоотдачи определяется из выражения

$$Nu_{xж} = 0,0296 \cdot Re_{xж}^{0,8} \cdot Pr_{ж}^{0,43} \cdot (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}$$

Средний коэффициент теплоотдачи определяют из выражения

$$\text{Nu}_{l/ж} = 0,037 \cdot \text{Re}_{l/ж}^{0,8} \cdot \text{Pr}_{ж}^{0,43} \cdot (\text{Pr}_{ж} / \text{Pr}_c)^{0,25}.$$

Для решения сложных задач теории пограничного слоя С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьев разработали приближенный метод, преимущество которого состоит в том, что с его помощью можно относительно просто проанализировать влияние на теплоотдачу и трение таких факторов, как граничные условия на стенке, высокая неизотермичность пограничного слоя, сжимаемость газа (число Маха), градиент давления, химические реакции в потоке газа, вдувание или отсос газа через пористую стенку и др. Подробно он излагается в специальной литературе.

Контрольные вопросы

1. Назовите критерий подобия, характеризующий режим течения жидкости и укажите диапазон его значений для различных режимов при продольном обтекании плоской пластины.
2. Поясните, как и почему связана теплоотдача с гидродинамическим режимом течения жидкости?
3. Поясните сущность методики вывода уравнения теплового потока для пограничного слоя при продольном обтекании плоской пластины.
4. Запишите выражения для определения толщин гидродинамических пограничных слоев – ламинарного и турбулентного – в размерном и безразмерном виде.
5. Запишите выражение для определения толщины температурного пограничного слоя.
6. Какими критериями подобия характеризуется теплоотдача при продольном обтекании плоской пластины? Запишите их выражения и поясните физический смысл.
7. Запишите критеральные уравнения для определения местной и средней теплоотдачи при продольном обтекании плоской пластины в случае ламинарного и турбулентного режимов течения жидкости.
8. Схематически изобразите на одном рисунке распределение местного и среднего коэффициентов теплоотдачи, а также толщину гидродинамического пограничного слоя в зависимости от длины пластины при ламинарном, турбулентном и смешанном режимах течения жидкости.

Лекция 15. Теплоотдача при вынужденном поперечном омывании труб и пучков труб

Гидродинамика и теплообмен при поперечном обтекании одиночного цилиндра. Угол отрыва ламинарного и турбулентного пограничного слоя. Изменение коэффициента теплоотдачи по окружности цилиндра. Средняя теплоотдача поперечно оmyваемого цилиндра. Зависимость коэффициента теплоотдачи цилиндра от угла атаки. Теплообмен при поперечном обтекании коридорных и шахматных пучков труб. Зависимость теплоотдачи от номера ряда, соотношения продольного и поперечного шагов пучка. Средний коэффициент теплоотдачи для пучка. Зависимость теплоотдачи пучка труб от угла атаки.

Гидродинамика и теплообмен при поперечном обтекании одиночного круглого цилиндра. Угол отрыва ламинарного и турбулентного пограничного слоя. Изменение коэффициента теплоотдачи по окружности цилиндра

Обтекание трубы поперечным потоком жидкости характеризуется рядом особенностей. Плавное, безотрывное обтекание цилиндра (рис. 15.1) имеет место только при значениях числа Рейнольдса

$$Re = \frac{w_0 d}{\nu} < 5 \quad (w_0 - \text{скорость набегающе-}$$

го потока, d – внешний диаметр цилиндра). При $Re > 5$ поперечно оmyваемый

цилиндр представляет собой неудобообтекаемое тело. Пограничный слой, образующийся на передней половине трубы, в кормовой части отрывается от ее поверхности, и позади цилиндра образуются два симметричных вихря (рис. 15.2). При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса вихри вытягиваются по течению все дальше и дальше от цилиндра. При $Re > 10^3$ вихри периодически отрываются от трубы и уносятся потоком жидкости, образуя за цилиндром вихревую дорожку (рис. 15.3). Отрыв пограничного слоя является следствием возрастания давления вдоль потока и подтормаживания жидкости твердой стенкой. При обтекании передней половины цилиндра сечение потока уменьшается, а скорость жидкости увеличивается. При этом статическое давление у поверхности цилиндра падает. Наоборот, в кормовой части статическое давление увеличивается, так как здесь скорость уменьшается. За счет действия сил вязкости скорость и, следовательно, кинетическая энергия жид-

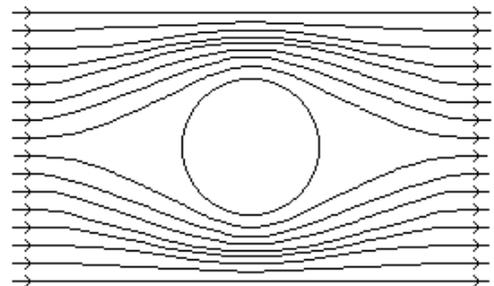


Рис. 15.1

кости у поверхности цилиндра малы. Возрастание давления вдоль потока приводит к торможению жидкости и последующему появлению вспятого движения. Возвратное течение оттесняет пограничный слой от поверхности тела, происходит отрыв потока и образование вихрей.

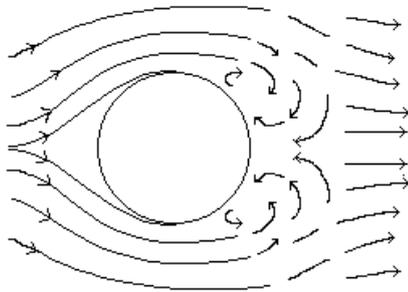


Рис. 15.2

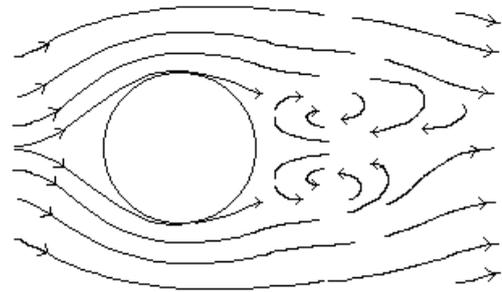


Рис. 15.3

Место отрыва пограничного слоя от поверхности трубы зависит от того, является ли движение в слое перед местом отрыва ламинарным или турбулентным. Отрыв ламинарного пограничного слоя, характеризующегося сравнительно небольшими значениями числа Рейнольдса и малой степенью турбулентности набегающего потока, происходит при угле φ , примерно равном $82-84^\circ$ (угол отсчитывается от лобовой точки трубы). При росте Re кинетическая энергия пограничного слоя увеличивается. Подтормаживание течения за счет роста давления приводит не к отрыву, а к переходу движения в слое в турбулентную форму. Дополнительная кинетическая энергия переносится в слой из внешнего потока за счет турбулентных пульсаций. В результате место отрыва смещается вниз по потоку и турбулентный пограничный слой отрывается при угле $120-140^\circ$. Смещение места отрыва приводит к уменьшению вихревой зоны за цилиндром, обтекание цилиндра улучшается.

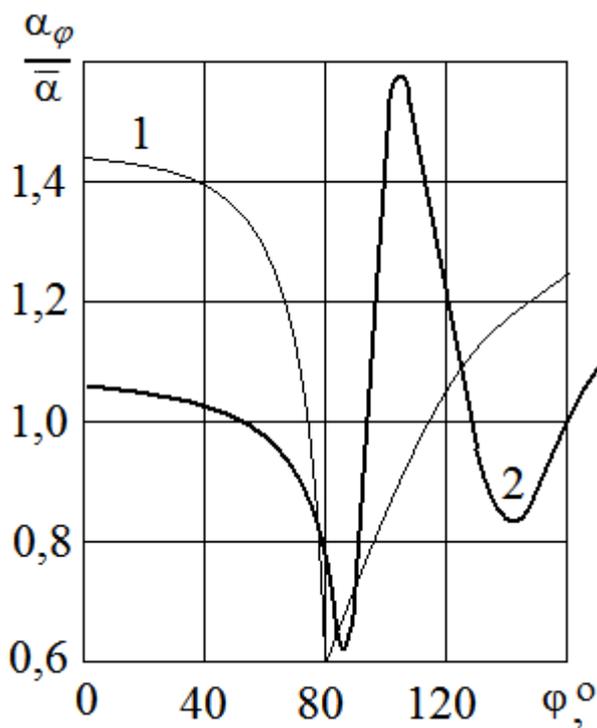


Рис. 15.4

Поэтому принято значение $Re_{кр} = 2 \cdot 10^5$.

Критическое значение числа Re , при котором наступает турбулентное течение в пограничном слое, разными авторами, экспериментировавшими на различных установках, было получено в пределах от $10^5-4 \cdot 10^5$. На его величину существенно влияет степень турбулентности набегающего на цилиндр потока жидкости и другие факторы, в том числе конструкция опытной установки.

Критическое значение числа Re , при котором наступает турбулентное течение в пограничном слое, разными авторами, экспериментировавшими на различных установках, было получено в пределах от $10^5-4 \cdot 10^5$. На его величину существенно влияет степень турбулентности набегающего на цилиндр потока жидкости и другие факторы, в том числе конструкция опытной установки.

Своеобразный характер обтекания трубы отражается и на ее теплоотдаче. Кривая изменения коэффициента теплоотдачи по окружности цилиндра (рис. 15.4) при ламинарном течении имеет один минимум (1), который соответствует точке отрыва пограничного слоя. Кормовая часть цилиндра омывается жидкостью, имеющей сложный вихревой характер движения, которым и определяется значение коэффициента теплоотдачи. При малых Re теплоотдача кормовой части цилиндра невелика, с возрастанием числа Re она увеличивается и может сравняться с теплоотдачей лобовой части трубы. На кривой (2) имеется два минимума. Первый соответствует переходу от ламинарного течения к турбулентному. Коэффициент теплоотдачи при этом резко возрастает: при больших значениях числа Re он может увеличиться в два – три раза. Наибольшая величина теплоотдачи имеет место при $\varphi = 120^\circ$. Второй минимум соответствует месту отрыва турбулентного пограничного слоя.

Снижение теплоотдачи перед отрывом можно объяснить подтормаживанием пограничного слоя. За местом отрыва труба омывается вихрями, имеющими сложный характер движения. Здесь теплоотдача несколько возрастает. Наши познания о вихревой зоне весьма ограничены.

Средняя теплоотдача поперечно омываемого цилиндра. Зависимость коэффициента теплоотдачи цилиндра от угла атаки

Таким образом, теплоотдача цилиндра тесно связана с характером омывания. Ввиду сложности картины омывания сложен и характер изменения теплоотдачи, что определяет трудность теоретического решения задачи. До настоящего времени теоретическими формулами удалось описать только теплоотдачу участка цилиндра, омываемого ламинарным слоем.

Подробные экспериментальные исследования средней по окружности цилиндра теплоотдачи были проведены А.А. Жукаускасом. Им были использованы опытные данные других авторов. В результате обобщения опытных данных было получено, что расчет среднего по окружности цилиндра коэффициента теплоотдачи можно производить по формулам [18]:

$$\text{При } 8 < Re_{жd} < 10^3 \quad Nu_{жd} = 0,5 Re_{жd}^{0,5} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} ; \quad (15.1)$$

$$\text{при } 10^3 < Re_{жd} < 2 \cdot 10^5 \quad Nu_{жd} = 0,25 Re_{жd}^{0,6} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} . \quad (15.2)$$

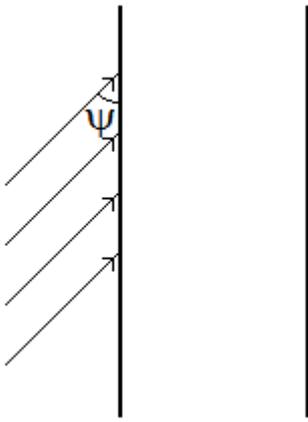


Рис. 15.5

При вычислении критериев подобия за определяющий линейный размер принят внешний диаметр трубы, а скорость отнесена к самому узкому поперечному сечению канала, в котором расположен цилиндр. Определяющей температурой является средняя температура жидкости, за исключением числа Прандтля, взятого при средней температуре стенки.

Формулы (15.1) и (15.2) справедливы для случая, когда угол атаки (рис. 15.5), составленный направлением потока с осью трубы, $\psi = 90^\circ$. Если $\psi < 90^\circ$, теплоотдача уменьшается. Для углов $\psi = 30 - 90^\circ$ можно использовать приближенную зависимость

$$\epsilon_\psi = \alpha_\psi / \alpha_{90^\circ} = 1 - 0,54 \cos^2 \psi .$$

Угол атаки $\psi = 0^\circ$ соответствует продольному омыванию трубы потоком жидкости. Как следует из формулы, поперечное омывание дает более высокую теплоотдачу. При углах атаки $\psi = 0 - 30^\circ$ значение ϵ_ψ помимо угла атаки зависит и от других факторов, поэтому простая аналитическая зависимость отсутствует.

Теплообмен при поперечном обтекании коридорных и шахматных пучков труб

Теплообменные устройства редко выполняются из одной поперечно омываемой трубы, так как поверхность теплообмена при этом невелика. Обычно трубы собирают в пучок. В технике чаще встречаются два основных типа трубных пучков (рис. 15.6): шахматный (а) и коридорный (б).

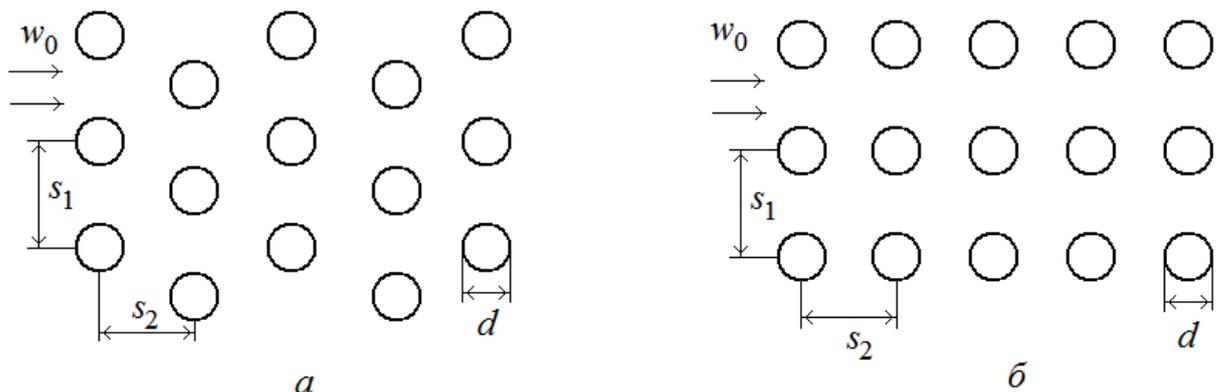


Рис. 15.6

Характеристиками пучка являются поперечный шаг s_1 (расстояние между осями труб в направлении, поперечном потоку жидкости) и продольный шаг s_2 (расстояние между осями соседних двух рядов труб, расположенных один за другим в направлении течения жидкости). Кроме того, пучки характеризуются внешним диаметром труб d и количеством рядов труб по ходу жидкости n . Для определенного пучка шаги s_1 и s_2 и диаметр труб d обычно являются постоянными, не изменяющимися как поперек, так и вдоль течения жидкости.

Течение жидкости в пучке имеет достаточно сложный характер. Так как рядом стоящие трубы пучка оказывают воздействие друг на друга, омывание отдельных труб пучка отличается от обтекания одиночной трубы. Обычно пучок труб устанавливают в каком-либо канале. Поэтому течение в пучке может быть связано с течением в канале.

Известны два основных режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. Эти же режимы могут иметь место и при движении жидкости в пучке. Форма течения жидкости в пучке во многом зависит от характера течения в канале перед пучком. Если при данном расходе и температурах течение в канале, где установлен пучок, было бы турбулентным при отсутствии пучка, то оно обязательно будет турбулентным и в пучке, так как пучок является прекрасным турбулизатором. Однако, если пучок был помещен в канал, в котором до его установки имел бы место ламинарный режим течения, то в этом случае в зависимости от числа Re можно иметь как одну, так и другую форму течения. Чем меньше число Рейнольдса, тем более устойчиво ламинарное течение. При малых Re межтрубные зазоры как бы образуют отдельные щелевидные каналы переменного сечения (исключение составляет предельный случай, когда расстояния между трубами очень велики).

В технике чаще встречается турбулентная форма течения жидкости в пучках. Так, например, поперечно оmyаемые трубные поверхности нагрева котельных агрегатов оmyаются турбулентным потоком. Однако и в этом случае имеют место различные законы теплообмена. Это объясняется различным характером течения на стенках труб. Закон теплообмена изменяется при появлении на поверхности труб турбулентного пограничного слоя. Если для отдельной трубы $Re_{кр} = 2 \cdot 10^5$, то для пучков турбулентный пограничный слой может появиться при меньших числах Re и его можно приближенно принять $Re_{кр} = 1 \cdot 10^5$.

При $Re < 1 \cdot 10^5$ передняя часть трубы оmyается ламинарным пограничным слоем, а кормовая – неупорядоченными вихрями. Таким образом, в то время как течение в пространстве между трубами является турбулентным, на передней половине трубы имеется слой ламинарно текущей жидкости – в целом имеет место смешанное движение жидкости.

Изменение характера оmyвания сказывается и на теплоотдаче. Можно выделить три основных режима оmyвания и теплоотдачи в поперечно обтекаемых трубных пучках. Назовем их соответственно ламинарным, смешанным и турбулентным режимами. В настоящее время наиболее изучен смешанный режим, который часто встречается в котельных агрегатах. Смешан-

ному режиму соответствуют числа Re примерно от $1 \cdot 10^3$ до $1 \cdot 10^5$. Рассмотрим его основные особенности (рис. 15.7, рис. 15.8).

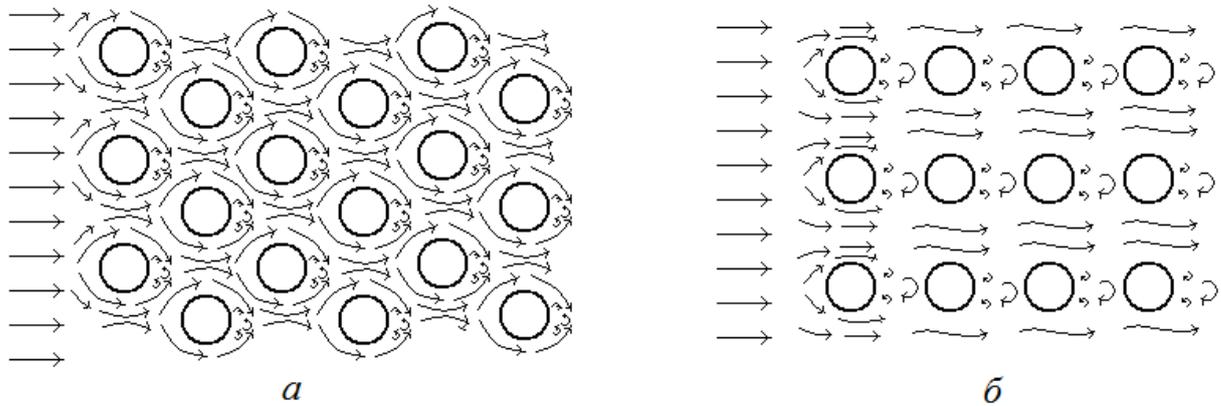


Рис. 15.7

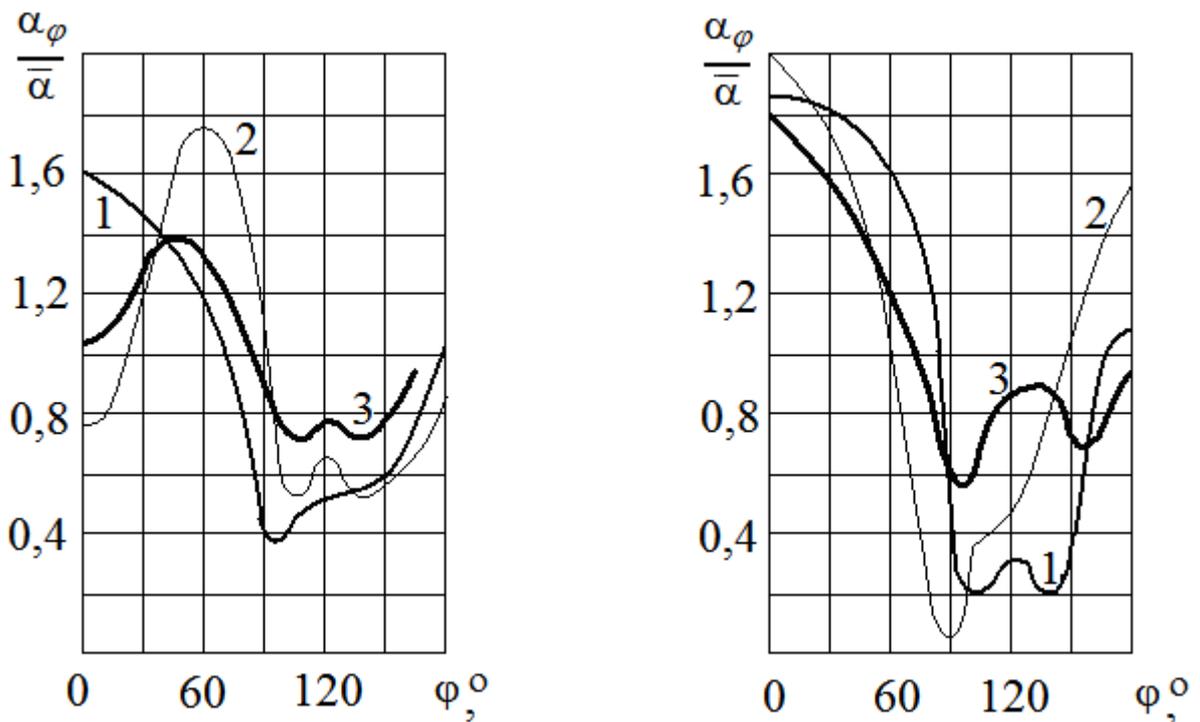


Рис. 15.8

Омывание первого ряда труб шахматного (а) и коридорного (б) пучков аналогично омыванию одиночного цилиндра (рис. 15.7). Характер омывания остальных рядов в сильной мере зависит от типа пучка. В коридорных пучках все трубы второго и последующих рядов находятся в вихревой зоне впереди стоящих труб, причем циркуляция жидкости в вихревой зоне слабая, т. к. поток проходит в основном в продольных зазорах между трубами («коридорах»). Поэтому в коридорных пучках как кормовая, так и лобовая части труб омываются со значительно меньшей интенсивностью, чем те же части оди-

ночной трубки или лобовая часть трубки первого ряда в пучке. В шахматных пучках характер омывания глубоко расположенных трубок качественно мало чем отличается от омывания трубок первого ряда.

Описанному характеру движения жидкости в пучках из круглых труб соответствует и распределение местных коэффициентов теплоотдачи по окружности труб различных рядов (рис. 15.8), из которого следует, что изменение местных коэффициентов теплоотдачи по окружности трубы для любого ряда шахматного пучка (b) соответствует распределению для одиночной трубы. Максимум теплоотдачи везде соответствует лобовой точке. Для коридорного пучка труб (a) распределение коэффициента теплоотдачи по окружности трубы для первого ряда также соответствует распределению для одиночной трубы, а для второго и последующих рядов характер распределения коэффициента теплоотдачи меняется. Максимум расположен не в лобовой точке, а под углом примерно 50° , что соответствует тем областям поверхности труб, где происходит удар набегающих струй.

Зависимость теплоотдачи от номера ряда, соотношения продольного и поперечного шагов пучка. Средний коэффициент теплоотдачи для пучка. Зависимость теплоотдачи пучка труб от угла атаки

Изменяется в начальных рядах пучков и средняя теплоотдача. На основании многочисленных исследований теплоотдачи пучков можно сделать следующие общие выводы: а) средняя теплоотдача первого ряда различна и определяется начальной турбулентностью потока; б) начиная примерно с третьего ряда, средняя теплоотдача стабилизируется, т. к. в глубинных рядах степень турбулентности потока определяется компоновкой пучка, являющегося по существу системой турбулизирующих устройств.

При невысокой степени турбулентности теплоотдача в зависимости от номера ряда показана на рис. 15.9. Возрастание теплоотдачи по рядам объясняется дополнительной турбулизацией потока в пучке. Однако если набегающий поток был турбулизован в значительной степени, то коэффициент теплоотдачи по рядам может быть одинаковым или даже уменьшаться в глубину пучка (тоже вызвано стабилизацией потока в пучке). Тогда пучок является детурбулизирующим устройством. В этом случае нет достоверных данных и коэффициент теплоотдачи считается одинаковым для всех рядов.

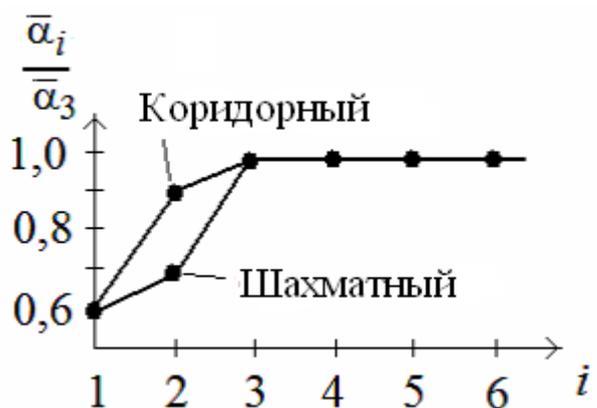


Рис. 15.9

Если пучок многорядный, то доля теплопередачи передних пучков невелика и ошибками в расчетах можно пренебречь.

Вторым фактором, влияющим на теплоотдачу, является относительное расстояние между трубами: s_1/d и s_2/d – поперечный и продольный относительные шаги.

Существуют данные, что при смешанном режиме средний коэффициент теплоотдачи глубинных рядов коридорных пучков труб уменьшается при увеличении s_2/d . От s_1/d коэффициент теплоотдачи не зависит.

В шахматных пучках теплоотдача глубинных рядов при $s_1/s_2 < 2$ пропорциональна величине $(s_1 / s_2)^{1/6}$. Если $s_1/s_2 > 2$, то коэффициент теплоотдачи не зависит от относительных шагов.

Итак, для смешанного режима ($10^3 \leq Re_{ж} \leq 10^5$) средний коэффициент теплоотдачи при поперечном обтекании газами пучков труб с чистой поверхностью можно проводить по формуле [18]

$$Nu_{ж} = C Re_{ж}^n Pr_{ж}^{0,33} \epsilon_s,$$

где при коридорном расположении труб $C = 0,26$, $n = 0,65$; при шахматном расположении труб $C = 0,41$, $n = 0,6$; ϵ_s – поправочный коэффициент, учитывающий влияние относительных шагов: для коридорного пучка труб $\epsilon_s = (s_2 / d)^{-0,15}$; для шахматного пучка труб при $s_1/s_2 < 2$ $\epsilon_s = (s_1 / s_2)^{1/6}$, при $s_1/s_2 > 2$ $\epsilon_s = 1,12$. Рассчитанный по ней коэффициент теплоотдачи соответствует значению его для третьего и всех последующих труб в пучке. Коэффициент теплоотдачи первого ряда пучка труб α_1 определяется как $\alpha_1 = 0,6\alpha_3$. Для труб второго ряда в коридорных пучках $\alpha_2 = 0,9\alpha_3$, в шахматных пучках $\alpha_2 = 0,7\alpha_3$.

Для определения среднего коэффициента теплоотдачи $\bar{\alpha}_{cp}$ всего пучка в целом, необходимо провести осреднение средних значения $\bar{\alpha}$, полученных для отдельных рядов:

$$\bar{\alpha}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Если трубы и, соответственно, их поверхности одинаковые, то

$$\bar{\alpha}_{cp} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (n - 2)\alpha_3}{n}.$$

Так же, как и при обтекании одиночной трубы, в пучках труб существует зависимость коэффициента теплоотдачи от угла атаки, которая представлена в [табл. 15.1](#).

Таблица 15.1

ψ°	90	80	70	60	50	40	30	20	10
ε_ψ	1,00	1,00	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

При двух других режимах течения – ламинарном и турбулентном – процесс теплоотдачи изучен хуже. При прочих равных условиях разница в теплоотдаче между течением в шахматном и коридорном пучках следующая: коэффициент теплоотдачи в шахматном пучке всегда больше, чем в коридорном, при этом, в случае ламинарного течения их отношение составляет примерно 1,5; при смешанном течении оно уменьшается и при турбулентном течении близко к единице.

Контрольные вопросы

1. Поясните особенности теплоотдачи при обтекании одиночной круглой трубы в зависимости от режимов течения жидкости в пограничном слое?
2. Почему цилиндр считается неудобообтекаемым телом? По какой причине происходит отрыв пограничного слоя?
3. При каких значениях числа Рейнольдса происходит переход от ламинарного течения жидкости к турбулентному? При каких значениях числа Рейнольдса и при каких углах от лобовой точки трубы происходит отрыв ламинарного или турбулентного пограничного слоя?
4. Схематически изобразите отношение местного коэффициента теплоотдачи к среднему по окружности цилиндра для случаев отрыва ламинарного и турбулентного пограничного слоев. Чем объясняется полученная зависимость?
5. Запишите критериальные уравнения для определения теплоотдачи в случае поперечного обтекания одиночного цилиндра.
6. Почему теплообменные аппараты выполняют в виде пучков труб? Какие виды компоновки пучков труб вам известны.
7. В чем будет заключаться основное отличие теплоотдачи при обтекании трубного пучка по сравнению с одиночным цилиндром; шахматного пучка труб по сравнению с коридорным; для ламинарного, смешанного и турбулентного режимов течения жидкости в пограничном слое?
8. Назовите характеристики пучков труб. Как зависит теплоотдача от взаимного расположения труб в пучке, от номера ряда труб?

9. Схематически изобразите отношение местного коэффициента теплоотдачи к среднему по окружности трубы в зависимости от номера ряда для случаев отрыва ламинарного и турбулентного пограничного слоев.

10. Запишите критериальные уравнения для определения теплоотдачи в случае поперечного обтекания трубных пучков?

Лекция 16. Описание процесса вынужденного течения жидкости в трубах

Гидродинамика и теплообмен при течении жидкости в трубах и каналах. Участки гидродинамической и тепловой стабилизации. Влияние силы тяжести. Вязкостный и вязкостно-гравитационный режимы теплоотдачи. Математическое описание теплообмена при течении жидкости в круглой трубе. Понятие стабилизированного теплообмена. Поля скоростей и температур при стабилизированном теплообмене в круглой трубе при постоянном тепловом потоке. Интеграл Лайона.

Гидродинамика и теплообмен при течении жидкости в трубах и каналах. Участки гидродинамической и тепловой стабилизации

Процесс теплоотдачи при течении жидкости в трубах является более сложным по сравнению с процессом теплоотдачи при омывании поверхности неограниченным потоком, при котором текущая вдали от тела жидкость не испытывает влияния процессов, идущих у стенки.

Поперечное сечение трубы имеет конечные размеры. В результате в трубе, начиная с некоторого расстояния от входа, жидкость по всему поперечному сечению испытывает тормозящее действие сил вязкости. Из-за конечных размеров трубы происходит изменение температуры жидкости как по сечению, так и по длине канала. Все это сказывается на теплоотдаче.

Течение жидкости в трубах может быть ламинарным и турбулентным. О режиме течения судят по величине числа Рейнольдса $Re = \frac{\bar{w}d}{\nu}$, где \bar{w} – средняя скорость жидкости, d – внутренний диаметр трубы. Нижней границей смены режимов принято значение числа Рейнольдса, приблизительно равное 2000 или 2300. При $Re > 2300$ поток после единичного возмущения уже не возвращается к ламинарному течению. Развитое турбулентное течение в технических трубах устанавливается при значении числа Рейнольдса, большем 10^4 . Между этими двумя значениями расположен переходный режим течения, которому соответствует и переходный режим теплоотдачи.

Если жидкость поступает в трубу из большого объема и стенки трубы на входе закруглены, то распределение скоростей на входе будет равномерным. При движении вдоль трубы у стенок образуется гидродинамический пограничный слой, толщина которого постепенно нарастает, а затем на некотором расстоянии от входа в трубу l_n он сливается и в трубе устанавливается

постоянное распределение скорости (рис. 16.1). Это расстояние называется длиной гидродинамического начального участка или участком гидродинамической стабилизации. Наблюдается для обоих типов течений, однако при турбулентном режиме развивается своеобразно.

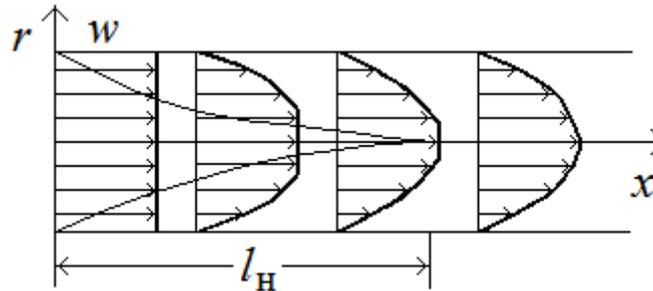


Рис. 16.1

Если жидкость из большого объема втекает в отверстие с плавным входом, то может существовать ламинарная форма течения. Образующийся ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный при достижении критической толщины, при этом заполнение сечения трубы происходит быстро. Течение в зоне перехода неустойчиво. При $Re > 5 \cdot 10^4$ с самого начала трубы развивается турбулентный пограничный слой. Если труба имеет острую кромку, то образуются турбулентные вихри, быстро разрушающие ламинарный пограничный слой.

Длина гидродинамического начального участка зависит от числа Рейнольдса, ее приближенное значение можно рассчитать по формулам [5]:

для ламинарного течения

$$l_H / d = 0,065 Re ,$$

для турбулентного течения

$$l_H / d = 1,45 Re^{1/4} .$$

Если поток гидродинамически стабилизирован, т. е. $l > l_H$, то скорости по течению потока при изотермическом ламинарном движении распределяются по параболе (профиль Пуазейля):

$$w = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] ,$$

где r_0 – радиус трубы; w_{\max} – скорость на оси трубы. Средняя скорость при этом равна половине максимальной: $\bar{w} = 0,5w_{\max}$.

При турбулентном движении распределение скорости по сечению не удается описать одним уравнением, что объясняется более сложным строением турбулентного потока. Почти все сечение трубы заполнено турбулентно текущей жидкостью. При больших значениях числа Рейнольдса толщина ламинарного подслоя составляет ничтожную часть диаметра. Несмотря на это, ламинарный подслоем является основным термическим сопротивлением, так как через него тепло передается только теплопроводностью.

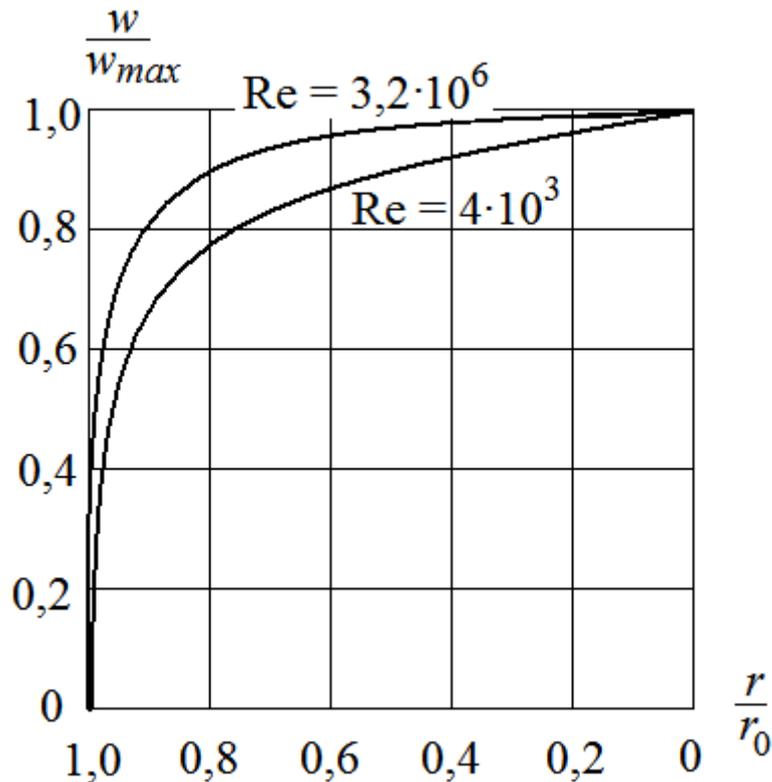


Рис. 16.2

При стабилизированном турбулентном течении жидкости в трубах распределение скорости по поперечному сечению имеет вид усеченной параболы. Максимальная скорость находится по-прежнему на оси трубы. Наиболее резко скорость изменяется вблизи стенки. При турбулентном течении

$\frac{w}{w_{\max}} = f\left(\frac{r}{r_0}, Re\right)$. График этой функции приведен на [рис. 16.2](#). Чем больше число Рейнольдса, тем резче изменяется скорость вблизи стенки и более полого в центральной части трубы. Отношение средней скорости течения к максимальной будет в этом случае функцией числа Рейнольдса. Экспериментально получено, что отношение средней скорости к максимальной составляет $\bar{w}/w_{\max} = 0,8 - 0,9$.

Рассмотренные закономерности течения жидкости в трубах строго справедливы при изотермическом течении.

Как и при омывании пластины, теплоотдача при течении жидкости в трубе неодинакова по длине. По мере движения жидкости вдоль трубы наблюдается прогрев или охлаждение пристенных слоев.

При этом в начале трубы центральное ядро жидкости еще имеет температуру, равную температуре жидкости на входе в трубу, и в теплообмене не участвует. Все изменение температуры сосредоточено в пристенных слоях. Таким образом, у поверхности трубы в ее начальной части образуется тепловой пограничный слой, толщина которого по мере удаления от входа увеличивается (рис. 16.3).

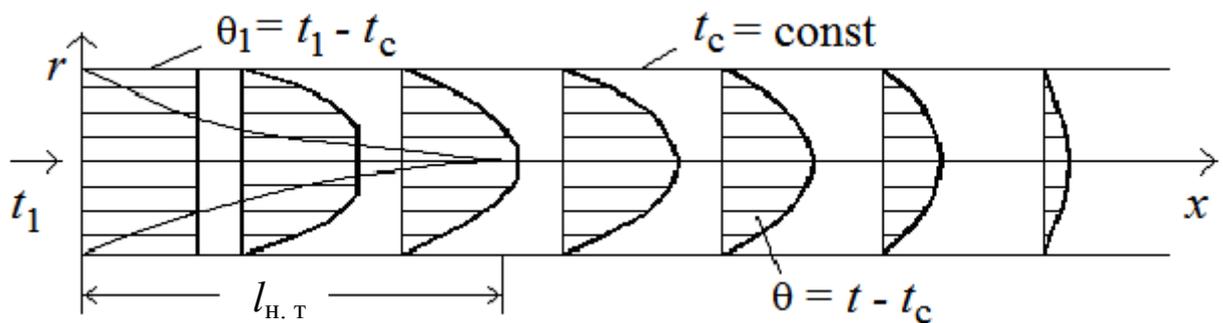


Рис. 16.3

На определенном расстоянии от входа, равном $l_{н.т}$, тепловые слои смыкаются, в дальнейшем вся жидкость участвует в теплообмене. Участок трубы длиной $l_{н.т}$ носит название участка тепловой стабилизации или начального термического участка. Наблюдается как при ламинарном, так и при турбулентном течении. После участка тепловой стабилизации изменяется не только средняя по сечению температура, но и температура жидкости на оси трубы, так как система стремится к тепловому равновесию ($\vartheta \rightarrow 0$).

Длина участка тепловой стабилизации зависит от большого количества факторов. Из теории пограничного слоя следует, что отношение толщин гидродинамического и теплового пограничных слоев зависит от величины числа Прандтля, поэтому для $Pr < 1$ $l_{н.т} < l_{н.г}$, а для $Pr > 1$ $l_{н.т} > l_{н.г}$.

При ламинарном режиме течения длину участка тепловой стабилизации можно определить по формулам [5]:

$$\text{для условия } t_c = \text{const} \quad l_{н.т} / d = 0,05 \text{ Re}_ж,$$

$$\text{для условия } q_c = \text{const} \quad l_{н.т} / d = 0,07 \text{ Re}_ж.$$

Влияние силы тяжести. Вязкостный и вязкостно-гравитационный режимы теплоотдачи

При ламинарном течении жидкости в трубе может иметь место два режима неизотермического движения: вязкостный и вязкостно-гравитационный, для которых режимы теплоотдачи различны.

Вязкостный режим имеет место при преобладании сил вязкости над подъемными силами, т. е. ему соответствует течение вязких жидкостей при отсутствии влияния естественной конвекции. Вероятность вязкостного режима возрастает, если мал диаметр трубы, мал температурный напор, а вязкость велика.

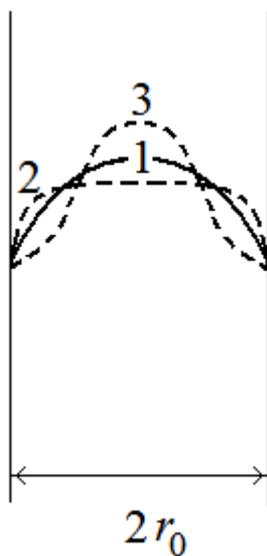


Рис 16.4

Вязкостно-гравитационный режим имеет место в том случае, когда подъемные силы достаточно велики, при этом на вынужденное движение жидкости накладываются токи естественной конвекции.

При вязкостном неизотермическом режиме (рис. 16.4) профиль скорости отклоняется от параболического Пуазейлевского (1) из-за изменения вязкости и его форма зависит от процесса. Если происходит нагревание, то уменьшается вязкость капельных жидкостей и скорость в пристеночных слоях повышается (2), при охлаждении – наоборот (3). Этот факт при расчете коэффициента теплоотдачи так же, как и при омывании плоской пластины, будет учитываться степенной зависимостью отношения чисел Прандтля, взятых при температуре жидкости и температуре стенки.

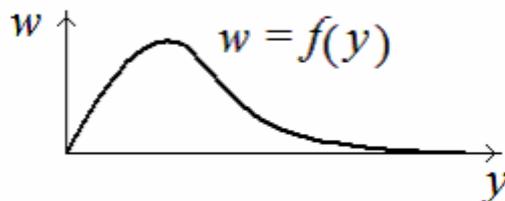


Рис 16.5

В случае вязкостно-гравитационного режима на распределение скорости накладываются токи естественной конвекции. Если вынужденного движения нет, то профиль скорости свободного движения жидкости у стенки представлен на рис. 16.5. Скорость равна нулю как на стенке (условие «прилипания»), так и на внешней границе гидродинамического пограничного слоя (отсутствует вынужденное движение жидкости). В зависимости от взаимного

направления свободного и вынужденного движения возможны три случая их совместного проявления.

1. Совпадение направлений (рис. 16.6) свободного (3) и вынужденного (2) движения соответствует течению жидкости в вертикальной трубе вверх и ее нагреванию или течению жидкости вниз и ее охлаждению. В этом случае скорость у стенки возрастает (1), а эпюра скорости имеет два максимума.

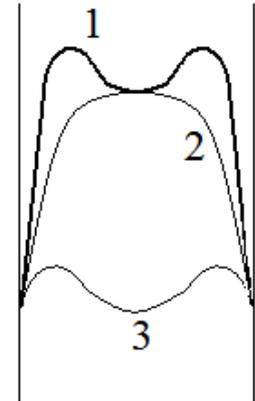


Рис 16.6

2. Перпендикулярное направление свободного и вынужденного движения соответствует течению жидкости в горизонтальной трубе. В этом случае возникает поперечная циркуляция жидкости (рис. 16.7) с восходящими вдоль стенок потоками при нагревании (а) и с нисходящими – при охлаждении (б). Теплоотдача увеличивается по сравнению с первым случаем за счет дополнительного перемешивания жидкости.

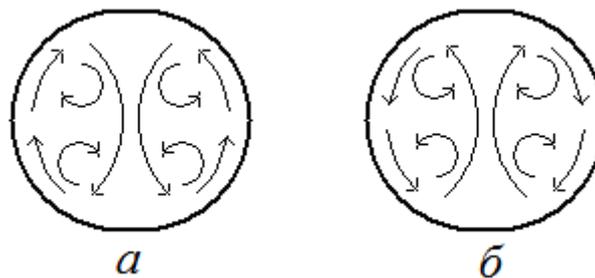


Рис. 16.7

3. Противоположное направление (рис. 16.8) свободного (3) и вынужденного (2) движения соответствует течению жидкости в вертикальной трубе вверх и ее охлаждению или течению жидкости вниз и ее нагреванию.

В этом случае скорость у стенки убывает и даже могут возникнуть области с обратным движением жидкости (1). В этом случае достигается самое большое значение коэффициента теплоотдачи из-за еще большего перемешивания жидкости.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: при неизотермическом течении ламинарного движения с параболическим распределением скоростей может не быть. Изменение течения находит свое отражение и в теплоотдаче.

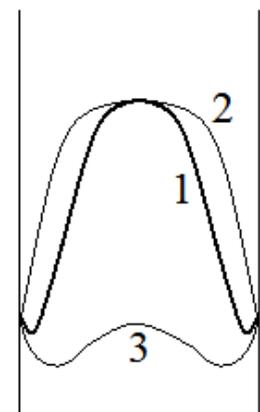


Рис. 16.8

Математическое описание теплообмена при течении жидкости в круглой трубе

Рассмотрим приближенный метод определения коэффициентов теплоотдачи при гидродинамически и термически стабилизированном течении жидкости в прямой круглой трубе [18].

Будем полагать, что жидкость несжимаемая, ее физические параметры постоянны, теплотой трения можно пренебречь.

Уравнение энергии для осесимметричного стационарного потока, записанного в цилиндрических координатах, приобретает следующий вид:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(w_r \frac{\partial t}{\partial r} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right).$$

Будем полагать, что перенос тепла в радиальном направлении много больше, чем в осевом. Тогда членом $\partial^2 t / \partial x^2$ можно пренебречь. Кроме того, $w_r = 0$. Уравнение энергии при этом может быть записано в следующем виде:

$$\rho c_p w_x \frac{\partial t}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left(\lambda r \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial t}{\partial r} \right),$$

$$\rho c_p w_x r \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial t}{\partial r} \right).$$

В турбулентном потоке тепло переносится не только теплопроводностью, но и путем турбулентных пульсаций, для которых можно записать:

$$\rho c_p w_x r \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left((\lambda + \lambda_\tau) r \frac{\partial t}{\partial r} \right),$$

где λ_τ – турбулентный аналог коэффициента теплопроводности; t и w_x – осредненные во времени местные (точечные) значения температуры и скорости турбулентного потока.

**Понятие стабилизированного теплообмена.
Поля скоростей и температур при стабилизированном теплообмене
в круглой трубе при постоянном тепловом потоке**

Примем, что $q_c = \text{const}$, тогда из уравнения теплового баланса $Gc_p d\bar{t}_ж = q_c dF$ следует:

$$\frac{d\bar{t}_ж}{dF} = \frac{q_c}{Gc_p} = \text{const}$$

или с учетом того, что площадь поверхности нагрева $F = 2\pi r_0 x$, расход жидкости $G = \rho \bar{w}_x S$, площадь поперечного сечения трубы $S = \pi r_0^2$:

$$\frac{d\bar{t}_ж}{dx} = \frac{2q_c}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \frac{2\alpha(t_c - \bar{t}_ж)}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \text{const},$$

где $\bar{t}_ж$ – среднекалориметрическая (средняя по энтальпии) температура жидкости в данном сечении; \bar{w}_x – средняя скорость в этом же сечении; r_0 – радиус трубы.

В рассматриваемых условиях средняя температура жидкости будет линейной функцией по x , так как при постоянном значении коэффициента теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ (стабилизированное течение) по линейному закону изменяется не только $\bar{t}_ж$, но и температура стенки:

$$t_c - \bar{t}_ж = \frac{q_c}{\alpha} = \frac{\text{const}}{\text{const}} = \text{const}.$$

При неизменных физических параметрах местная температура жидкости изменяется вдоль трубы тоже по линейному закону и производная та же:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2q_c}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \text{const}.$$

Интеграл Лайона

Подставим полученное значение производной в уравнение:

$$\rho c_p w_x r \frac{2q_c}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \frac{d}{dr} \left((\lambda + \lambda_\tau) r \frac{dt}{dr} \right)$$

или в безразмерном виде, где $W_x = w_x / \bar{w}_x$ и $R = r / r_0$ – безразмерные скорость и радиус:



$$2q_c r_0 W_x R = \frac{d}{dR} \left((\lambda + \lambda_T) R \frac{dt}{dR} \right).$$

Разделяя переменные и интегрируя в пределах от 0 до R и от 0 до $(\lambda + \lambda_T) R \frac{dt}{dR}$, получаем:

$$(\lambda + \lambda_T) R \frac{dt}{dR} = 2q_c r_0 \int_0^R W_x R dR.$$

Отсюда следует:

$$\frac{dt}{dR} = \frac{2q_c r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR$$

или

$$dt = \left(\frac{2q_c r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR \right) dR. \quad (16.1)$$

Среднекалориметрическая температура жидкости при постоянных теплоемкости и плотности определяется уравнением

$$\bar{t}_ж = \frac{1}{f_0 \bar{w}_x} \int_0^{f_0} w_x t df.$$

Для круглой трубы $f = \pi r^2$ и $df = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$, тогда

$$\bar{t}_ж = \frac{1}{r_0^2 \bar{w}_x} \int_0^{r_0} w_x t r dr = 2 \int_0^1 t W_x R dR.$$

Найдем этот интеграл по частям, воспользовавшись формулой

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Обозначим $t = u$ и $dv = W_x R dR$ или $v = \int_0^R W_x R dR$, тогда

$$\begin{aligned} \bar{t}_ж &= 2 \left[t \int_0^R W_x R dR \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt = \\ &= 2 \left[t_c \int_0^1 W_x R dR - \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^1 W_x R dR$ может быть преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_x R dR &= \frac{2\pi}{2\bar{w}_x \pi r_0^2} \int_0^{r_0} w_x r dr = \frac{\int_0^{r_0} w_x 2\pi r dr}{2\bar{w}_x \pi r_0^2} = \\ &= \frac{\bar{w}_x \pi r_0^2}{2\bar{w}_x \pi r_0^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя полученное значение интеграла в предыдущее уравнение, получаем:

$$\bar{t}_ж = t_c - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt.$$

Подставляя сюда значение dt из (16.1), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{t}_ж &= t_c - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) \cdot \left(\frac{2q_c r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR \right) dR = \\ &= t_c - \frac{4q_c r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\frac{(t_c - \bar{t}_ж)\lambda}{2q_c r_0} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_{\tau}}{\lambda} \right) R} dR.$$

Согласно определению,

$$\frac{(t_c - \bar{t}_ж)\lambda}{2q_c r_0} = \frac{\lambda}{\alpha d} = \frac{1}{\text{Nu}_d},$$

тогда

$$\frac{1}{\text{Nu}_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_{\tau}}{\lambda} \right) R} dR.$$

Это уравнение было получено Лайоном, является универсальным, так как пригодно как для ламинарного, так и для турбулентного течений. Если известно распределение скорости, то можно рассчитать и коэффициент теплоотдачи.

Для ламинарного течения интеграл Лайона упрощается:

$$\frac{1}{\text{Nu}_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left(\int_0^R W_x R dR \right)^2.$$

При гидродинамически стабилизированном течении профиль скорости $w = w_{\max} \left[1 - (r/r_0)^2 \right]$ или в безразмерном виде $W_x = 2 \left[1 - R^2 \right]$. Подставим его в предыдущее уравнение, тогда

$$\frac{1}{\text{Nu}_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left(\int_0^R W 2(1 - R^2) R dR \right)^2 = \frac{11}{48}.$$

Отсюда следует, что $\text{Nu}_d = \frac{48}{11} \approx 4,36$. Таким образом, при стабилизированной теплоотдаче критерий Нуссельта постоянен и равен 4,36. Это условие было получено при постоянном тепловом потоке в стенке. При постоянной температуре стенки теория дает $\text{Nu}_d = 3,66$. Значения числа Нуссельта получены для параболического распределения скорости. Такое распределение будет иметь место при исчезающе малых температурных напорах или при неизменных параметрах жидкости. Поэтому расхождение полученного результата с опытными данными может быть очень велико. В настоящее время практические расчеты ведутся по эмпирическим формулам.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте гидродинамические режимы течения жидкости в трубе и их влияние на теплоотдачу.
2. Укажите диапазон чисел Рейнольдса, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам течения жидкости в трубе.
3. Как меняется профиль скорости гидродинамически стабилизированного течения жидкости в случае различных температур жидкости и стенки?
4. Поясните влияние силы тяжести на течение жидкости в трубе, перечислите режимы теплоотдачи.
5. Какие критерии подобия являются определяющими для различных режимов теплоотдачи при течении жидкости в трубе и почему?
6. Дайте определение следующих понятий: начальный участок гидродинамической стабилизации, начальный участок термической стабилизации, гидродинамически стабилизированное течение жидкости, термически стабилизированное течение жидкости.
7. Что общего и в чем состоит различие термически и гидродинамически стабилизированного течения жидкости?
8. Схематически изобразите распределение скорости для течения жидкости в трубе в случае совпадения свободного и вынужденного движения, противоположного направления свободного и вынужденного движения и перпендикулярного направления свободного и вынужденного движения.
9. В каком случае взаимного направления свободного и вынужденного движения достигается лучшая теплоотдача и почему?
10. С каких значений длины трубы течение жидкости можно считать термически и гидродинамически стабилизированным?
11. Запишите систему дифференциальных уравнений для расчета теплоотдачи при вынужденном течении жидкости в трубе.
12. По какому закону меняется температура жидкости и стенки в случае пропускания по трубе электрического тока?
13. Запишите уравнение Лайона.
14. Запишите выражение для определения среднекалориметрической температуры жидкости. Как ее можно измерить экспериментально?
15. Поясните методику расчета и запишите решение интеграла Лайона для ламинарного течения жидкости в круглой трубе для постоянного теплового потока в стенке.
16. Чему равно число Нуссельта для теплоотдачи при ламинарном течении жидкости в круглой трубе в случае постоянного значения температуры стенки?
17. В каких случаях реальная теплоотдача может быть вычислена по выражению $Nu_d = 3,66$?

**Лекция 17.
Определение коэффициентов
теплоотдачи при вынужденном течении
жидкости в трубах**

Теплоотдача при ламинарном и турбулентном течении в гладких трубах круглого поперечного сечения. Влияние участка гидродинамической и термической стабилизации. Особенности теплообмена в трубах некруглого сечения. Влияние шероховатости поверхности на теплообмен в трубах. Теплоотдача в изогнутых трубах.

**Теплоотдача при ламинарном и турбулентном
течении в гладких трубах круглого поперечного сечения.
Влияние участка гидродинамической и термической стабилизации**

Вязкостный режим имеет место при ламинарном течении жидкости $Re = wd / \nu < 2300$ и отсутствии влияния силы тяжести $Ra = g\beta \frac{(t_c - t)d^3}{\nu^2} Pr < 8 \cdot 10^5$. Развитие процесса теплоотдачи при обтекании пластины и в начальном участке трубы протекает идентично. При вязкостном течении начальный термический участок имеет большую длину и может превышать размер (длину или высоту) теплообменного аппарата. Поэтому в качестве определяющего размера даже для достаточно длинных труб некоторыми авторами принято расстояние x рассматриваемого сечения от начала трубы. Влияние же кривизны канала и стеснения потока стенками трубы учитывают комплексом $(x/d)^{0,1}$.

По данным Энергетического института им. Г.М.Кржижановского для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при вязкостном режиме предложена эмпирическая формула [18]

$$Nu_{ж,x} = 0,33 Re_{ж,x}^{0,5} Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25} (x/d)^{0,1}. \quad (17.1)$$

Здесь в качестве определяющего размера принято расстояние рассматриваемого сечения от начала трубы, а в качестве определяющей температуры – средняя для данного сечения температура жидкости (кроме числа Прандтля, взятого при температуре стенки в данном сечении, необходимого для учета

направления теплового потока). Формула (17.1) получена при условии постоянного теплового потока в стенке и при значениях $l/d \leq 216$, где l – длина трубы, d – ее внутренний диаметр. Вход в трубу мог быть как с плавной, так и с острой кромкой.

Средний коэффициент теплоотдачи при вязкостном режиме течения капельных жидкостей в трубах при постоянной температуре стенки можно производить по формуле, основанной на решении задачи Гретца-Нуссельта [5]:

$$Nu_{r,d} = 1,55 \left(Re_r \frac{d}{l} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_{ж}}{\mu_c} \right)^{0,14} \cdot \varepsilon, \quad (17.2)$$

где $Nu_{r,d} = \frac{\alpha d}{\lambda_r}$; $Re_r \frac{d}{l} = \frac{4 G c_{pг}}{\pi l \lambda_r}$; $\alpha = \frac{q}{t_{ж} - t_c}$; индексы «с» и «г» означают, что физические свойства жидкости выбираются, соответственно, при температуре стенки t_c и температуре граничного слоя $t_r = 0,5(t_{ж} - t_c)$; ε – поправка на участок гидродинамической стабилизации.

$$\varepsilon = 0,6 \left(\frac{1}{Re_{ж} \frac{l}{d}} \right)^{-1/7} \left(1 + 2,5 \frac{1}{Re_{ж} \frac{l}{d}} \right).$$

Эта поправка вводится, когда перед обогреваемым участком трубы нет участка гидродинамической стабилизации и комплекс $\frac{1}{Re_{ж} \frac{l}{d}} < 0,1$. Границы

применимости формулы: $Re_r \frac{d}{l} \leq 0,05$, $0,07 \leq \frac{\mu_{ж}}{\mu_c} \leq 1500$.

За пределами участка термической стабилизации средний коэффициент теплоотдачи определяем из выражений для постоянной температуры стенки $Nu = 3,66$, для постоянного теплового потока в стенке $Nu = 4,36$.

Вязкостно-гравитационный режим имеет место при ламинарном течении жидкости $Re < 2300$ и наличии влияния силы тяжести $Ra > 8 \cdot 10^5$. Влияние естественной конвекции приводит к тому, что коэффициент теплоотдачи при определенных условиях может возрасти в пять раз по сравнению с вязкостным режимом. Учет влияния естественной конвекции при различных положениях трубы в сочетании с различными условиями ее нагрева и охлаждения является задачей трудной. Более или менее точные обобщения опытных данных получены только для частных случаев вязкостно-гравитационного режима. М. А. Михеев рекомендует производить приближенный расчет среднего коэффициента теплоотдачи по формуле [18]

$$Nu_{jd} = 0,15 Re_{jd}^{0,33} Pr_{jd}^{0,43} (Ra_{jd})^{0,1} (Pr_{jd}/Pr_c)^{0,25} \varepsilon_l. \quad (17.3)$$

Здесь в виде определяющей принята средняя температура жидкости в трубе, определяющим размером является внутренний диаметр трубы. Тогда число Релея определяется как

$$Ra_{jd} = g \beta_{jd} \frac{(t_c - t_{jd}) d^3}{\nu_{jd} a_{jd}}.$$

Поправка на участок гидродинамической стабилизации при ламинарном режиме ε_l вводится, если $l/d < 50$, и определяется из [табл. 17.1](#).

Таблица 17.1

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_l	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1,00

Наиболее точные значения коэффициентов теплоотдачи формула (17.3) дает для горизонтальных труб.

Для более ограниченного интервала параметров средняя теплоотдача при вязкостно-гравитационном режиме течения в горизонтальных трубах и $Re_{jd} < 3000$ может быть вычислена по следующей формуле [18]:

$$Nu_{rd} = 0,8 \cdot \left(Pe_r \frac{d}{l} \right)^{0,4} \cdot Ra_{rd}^{0,1} \cdot \left(\frac{\mu_{jd}}{\mu_c} \right)^{0,14}.$$

Здесь $Ra_{rd} = g \beta_r \frac{(t_c - t_{jd}) d^3}{\nu_r a_r}$; $Pe_r = \frac{w d}{a_r}$. Индексы «с», «ж» и «г» обозначают температуры стенки, жидкости и граничного слоя соответственно. Формула применима при $20 \leq Pe_r \frac{d}{l} \leq 120$; $2 \leq Pr_r \leq 10$; $10^6 \leq Ra_{rd} \leq 13 \cdot 10^6$.

При движении жидкости в вертикальных трубах и совпадении направлений свободной и вынужденной конвекции средний коэффициент теплоотдачи может быть рассчитан по формуле [20]

$$Nu_c = 0,35 \left(Pe_r \frac{d}{l} \right)^{0,3} \left(Ra_{rd} \frac{d}{l} \right)^{0,18}.$$

Формула справедлива при $Re_{ж} > 2300$; $\left(Pe_{г} \frac{d}{l} \right)_{ac} \leq Pe_{г} \frac{d}{l} \leq 110$;

$8 \cdot 10^5 \leq Ra_{гd} \leq 4 \cdot 10^8$. Здесь $\left(Pe_{г} \frac{d}{l} \right)_{ac} \approx 1,5 \left(Ra \frac{d}{l} \right)_{г}^{0,25}$ – асимптотическое значение числа Пекле.

При движении жидкости в вертикальных трубах и противоположном направлении свободной и вынужденной конвекции для расчета среднего коэффициента теплоотдачи можно воспользоваться формулой [20]

$$Nu_{ж} = 0,037 Re_{ж}^{0,37} Pr_{ж}^{0,4} \left(\frac{\mu_c}{\mu_{ж}} \right)^n,$$

где при нагревании $n = -0,11$; при охлаждении $n = -0,25$. Формула справедлива при $250 \leq Re_{ж} \leq 2 \cdot 10^4$; $1,5 \cdot 10^6 \leq Ra_{гd} \leq 12 \cdot 10^6$.

Турбулентный режим. Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при турбулентном течении различных жидкостей (кроме жидких металлов) для $Re = \frac{w d}{\nu} > 10^4$ М. А. Михеевым после обобщения большого количества экспериментальных данных различных исследователей было получено следующее уравнение [22]:

$$Nu_{жd} = 0,021 Re_{жd}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_l. \quad (17.4)$$

Поправка на участок гидродинамической стабилизации при турбулентном режиме ε_l вводится, если $l/d < 50$, и определяется из табл. 17.2.

Таблица 17.2

Re	l/d								
	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1,00
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1,00
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1,00
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1,00
$1 \cdot 10^6$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1,00

Особенности теплообмена в трубах некруглого сечения

В настоящее время наиболее хорошо изучена теплоотдача в круглых трубах. Если труба имеет некруглое поперечное сечение, то расчет теплоотдачи в них сводится к определению той же величины в некоторой эквивалентной трубе круглого поперечного сечения с диаметром

$$d_э = 4f / u ,$$

где f – поперечное сечение трубы; u – его периметр.

Метод расчета теплоотдачи с помощью эквивалентного или гидравлического диаметра является приближенным, точные границы применимости его не установлены. По рекомендациям М. А. Михеева, при турбулентном течении жидкости расчет теплоотдачи в каналах прямоугольного и треугольного сечений, а также при продольном омывании трубного пучка можно производить для эквивалентного диаметра по формуле (17.4).

Для пучка труб эквивалентный диаметр рассчитывается по формуле [21]

$$d_э = \frac{4f}{u} = \frac{4 \left(s_1 s_2 - \frac{\pi d^2}{4} \right)}{\pi d} = 4 \frac{s_1 s_2}{\pi d} - d.$$

Кроме того, поправка, учитывающая направление теплового потока $(Pr_ж / Pr_с)^{0,25}$ для газов, имеющих высокую температуру, неприменима. Здесь расчет ведется по отношению абсолютных температур газов $\Theta = T_с / T_ж$:

$$Nu = Nu_ж (1,27 - 0,27 \Theta)$$

при охлаждении и $0,5 \leq \Theta \leq 1,0$,

$$Nu = Nu_ж \Theta^{-0,55}$$

при нагревании и $1,0 \leq \Theta \leq 3,5$.

Здесь $Nu_ж$ рассчитывается по формуле (17.4).

Считается, что этот метод расчета непригоден при ламинарном течении и при течении расплавленных металлов.

По данным В.П.Исаченко средние коэффициенты теплоотдачи на внутренней стенке при турбулентном течении газов и капельных жидкостей в каналах кольцевого поперечного сечения можно рассчитать по уравнению [18]

$$Nu_{жd} = 0,017 Re_{жд}^{0,8} Pr_{ж}^{0,4} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_с} \right)^{0,25} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^{0,18} \varepsilon_l ,$$

где $d = d_2 - d_1$ – эквивалентный диаметр кольцевого канала.

Влияние шероховатости поверхности на теплообмен в трубах

При турбулентном течении жидкости в шероховатых трубах происходят существенные гидродинамические преобразования. Высота бугорков, составляющих шероховатость, может быть меньше толщины ламинарного подслоя, и тогда их наличие не сказывается на течении, а следовательно, и на теплоотдаче. Если высота бугорков больше, то течение в ламинарном подслое нарушается, происходит их отрывное, вихревое обтекание. Так как основное термическое сопротивление теплоотдаче при турбулентном течении жидкости сосредоточено в ламинарном подслое, то из-за его разрушения происходит существенное увеличение теплоотдачи, которое может достигать трехкратной величины по сравнению с гладкой трубой.

Опыты показывают, что теплоотдача в шероховатых трубах по сравнению с гладкими зависит от формы неровностей поверхности, величины относительной шероховатости, величины концентрации бугорков и т.д. Обобщенных формул, учитывающих все эти факторы, в настоящее время не имеется. Для технических расчетов часто учитывают влияние шероховатости увеличением на 10% коэффициента теплоотдачи для гладких труб.

Теплоотдача в изогнутых трубах

В технике часто встречаются теплообменные аппараты, в которых один из теплоносителей протекает в изогнутом канале радиусом R . При движении в таком канале в жидкости возникают центробежные силы, создающие в поперечном сечении циркуляционные токи, так называемую вторичную циркуляцию. В результате возникает сложное движение жидкости по винтовой линии. С увеличением радиуса влияние центробежного эффекта исчезает. Вторичная циркуляция может наблюдаться как при турбулентном, так и при ламинарном течении [18].

Экспериментально было установлено, что вторичная циркуляция возникает только при числах Рейнольдса, больших некоторого критического значения $Re'_{кр} = \frac{16,4}{\sqrt{d/R}}$, где d – внутренний диаметр трубы; R – радиус закругления змеевика. Формула справедлива при $d/R \geq 8 \cdot 10^{-4}$. Для $Re < Re'_{кр}$ расчет теплоотдачи ведется по формулам для ламинарного течения (17.2) или (17.3). Считается, что здесь имеет место ламинарное течение без вторичной циркуляции.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса от значений, определяемых выражением $Re''_{кр} = 18\,500 \left(\frac{d}{2R} \right)^{0,28}$, и больших может наступить развитое турбулентное течение при наличии вторичной циркуляции. Промежуточная область, соответствующая $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$, также характеризуется наличием вторичной циркуляции. Здесь расчет теплоотдачи ведется по формуле (17.4) как для турбулентного течения жидкости.

Для течений с $Re > Re''_{кр}$ увеличение теплоотдачи учитывается множителем $\varepsilon_{изг} = 1 + 1,18 \frac{d}{R}$, на который следует умножить коэффициент теплоотдачи для турбулентного течения, полученный по формуле (17.4).

Контрольные вопросы

1. Запишите эмпирические критериальные уравнения для расчета теплоотдачи при течении жидкости в прямых гладких круглых трубах.
2. Почему для вязкостно-гравитационного режима необходимо учитывать взаимное направление свободного и вынужденного движения?
3. Какие критерии подобия являются определяющими для вязкостного, вязкостно-гравитационного и турбулентного режимов течения?
4. В каком случае необходимо учитывать поправку в коэффициент теплоотдачи на участок гидродинамической стабилизации?
5. Почему при турбулентном режиме течения поправка на участок гидродинамической стабилизации зависит от числа Рейнольдса?
6. Поясните методику расчета теплоотдачи в некруглых трубах. Дайте определение эффективного диаметра трубы.
7. Как влияет на теплоотдачу изогнутость труб? Как рассчитывают коэффициент теплоотдачи для змеевиков?
8. Поясните причины изменения теплоотдачи и методику расчета коэффициента теплоотдачи для шероховатых труб.
9. Поясните особенности расчета теплоотдачи при течении в трубе газа, имеющего высокую температуру.
10. Что является определяющим размером и определяющей температурой при течении жидкости в трубе?

Лекция 18.

Отдельные задачи конвективного теплообмена в однофазной среде

Теплоотдача при течении газа с большими скоростями. Адиабатная температура стенки. Изменение физических свойств теплоносителя с температурой. Теплоотдача жидких металлов. Теплоотдача при наличии в жидкости внутренних источников тепла. Особенности теплообмена при сверхкритическом состоянии вещества. Особенности теплообмена при течении разреженного газа.

**Теплоотдача при течении газа с большими скоростями.
Адиабатная температура стенки. Изменение теплофизических
свойств теплоносителя с температурой**

Вопросы теплоотдачи при течении газов с высокой скоростью приобрели в последнее время очень важное значение в связи с конструированием и расчетом газовых турбин, самолетов, ракет, магнитогидродинамических генераторов электрической энергии и различных теплообменных устройств.

Увеличение скорости приводит к уменьшению толщины гидродинамического пограничного слоя и, следовательно, к увеличению скоростного градиента у стенки и увеличению трения. В результате появляется необходимость учета выделения тепла за счет трения. Выделяющееся тепло идет на повышение температуры газа и приводит к его расширению. В этих условиях давление газа может изменяться очень существенно, что в свою очередь вызывает значительное изменение плотности. В результате возникает необходимость учета сжимаемости газа.

При больших скоростях гидродинамические процессы и процессы теплообмена неразрывно связаны. Большое значение приобретают также термодинамические факторы, поскольку течение с большими скоростями характеризуется взаимными преобразованиями внутренней и кинетической энергии потока и расширением газа.

Уравнение первого закона термодинамики для струйки газа можно записать в следующем виде:

$$\left(i_1 + \frac{\omega_1^2}{2} \right) - \left(i_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) = \frac{Q}{G},$$

где i – удельная энтальпия, Дж/кг; ω – скорость газа, м/с; Q – тепловой поток на участке между сечениями 1 и 2, Вт; G – расход газа, кг/с; индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к начальному и конечному сечениям потока.

Энтальпия i_T , при полном адиабатическом ($Q=0$) торможении называется энтальпией адиабатического торможения, или энтальпией потока.

$$i_T = i + \frac{\omega^2}{2}.$$

Таким образом, при адиабатическом торможении потока его кинетическая энергия идет на изменение энтальпии. Изменение энтальпии в конечном счете приводит к изменению температуры газов.

Температура T_T , которую принимает газ при полном адиабатическом торможении, называется температурой торможения:

$$T_T = T + \frac{\omega^2}{2c_p}.$$

Очевидно, при больших скоростях газа ранее использовавшееся уравнение теплового баланса $Q=Gc_p(t_1-t_2)$ должно быть заменено уравнением

$$Q = Gc_p(T_{T1} - T_{T2}).$$

Важной характеристикой потока является число Маха M , величина, представляющая собой отношение скорости потока к скорости звука в этой же точке.

При течении с большой скоростью использование уравнение Ньютона – Рихмана $q_c = \alpha(t_c - t_r)$ может привести к неточным результатам. Например, при омывании теплоизоляционного тела, когда $q_c = 0$, эта формула дает, что $q_c \neq 0$. Нужно учесть то обстоятельство, что при течении с большими скоростями температура в пограничном слое повышается. Поэтому расчет теплоотдачи при больших скоростях ведут по формуле

$$q = \alpha(T_r + r \frac{\omega^2}{2c_p} - T_c) \text{ или } q = \alpha(t_{\text{соб}} - t_c).$$

где $t_{\text{соб}}$ – собственная температура; r – коэффициент восстановления; t_c – температура стенки.

При больших скоростях газа параметры потока существенно изменяются как вдоль по течению, так и по сечению канала. Ввиду этого представляет интерес знание локальных коэффициентов теплоотдачи.

Местные коэффициенты теплоотдачи при охлаждении турбулентного потока газа, текущего в круглой трубе со сверхзвуковой скоростью и большими температурными напорами, могут быть определены по уравнению [18]

$$Nu_{rd} = 0,021 Re_{rd}^{0,8} Pr_r^{0,43} (T_r / T_t)^{0,43}.$$

Физические параметры в этой формуле отнесены к средней термодинамической температуре газа в рассматриваемом сечении. Определяющим размером является внутренний диаметр трубы. В критерий Рейнольдса входит средняя в данном сечении скорость газа.

Теплоотдача жидких металлов

Расплавленные металлы применяют в тех случаях, когда необходимо обеспечить интенсивный отвод тепла от поверхности нагрева или когда при низком давлении требуется иметь высокую температуру рабочей жидкости.

Применение в качестве теплоносителя воды, имеющей высокий коэффициент теплоотдачи, приводит к тому, что для получения значительных температур рабочей жидкости необходимо существенно увеличить давление.

Газ может быть догрет до высоких температур без повышения давления. Однако теплоотдача от стенки к газу очень мала, что приводит к возрастанию температуры поверхности нагрева. Газ как теплоноситель имеет существенный недостаток. Так как теплоемкость газа мала, из уравнения теплового баланса следует, что при съеме заданного количества тепла расходы газа должны значительно возрасти. Следовательно, должны возрасти и гидравлические потери.

Охлаждение жидкими металлами совмещает достоинства газового и водяного охлаждения. Жидкие металлы имеют высокую точку кипения, что позволяет повышать их температуру без применения высокого давления, им присущи также большие коэффициенты теплоотдачи.

Наиболее приемлемыми теплоносителями этого типа являются щелочные и тяжелые металлы и их сплавы: натрий, калий, литий, ртуть, олово и др.

В ламинарном потоке тепло поперек течения передается теплопроводностью, в турбулентном – теплопроводностью и конвекцией. Для жидких металлов теплопроводность велика и может конкурировать с процессом турбулентного переноса.

Большое практическое значение имеет теплоотдача при течении жидких металлов в трубах. Для чистых жидких металлов средний коэффициент теплоотдачи для стабилизированного турбулентного течения в прямых гладких трубах без учета теплопроводности вдоль потока жидкого металла может быть вычислен по формуле [21]

$$Nu_{jd} = 5 + 0,025 Pe_{jd}^{0,8}. \quad (18.1)$$

Двучленность правой части данной формулы объясняется учетом радиальной теплопроводности в потоке жидких металлов. По мере уменьшения числа Пекле роль аксиальной теплопроводности возрастает.

Аналитическое исследование теплоотдачи при ламинарном стабилизированном течении жидкости с учетом аксиальной теплопроводности при постоянном тепловом потоке в стенке дает постоянное значение критерия Нуссельта:

$$Nu_{жд} = 4,36.$$

Теоретические исследования проведены в предположении, что физические параметры постоянны, что неплохо выполняется для жидких металлов.

Теплоотдача при наличии в жидкости внутренних источников тепла

Внутренние источники тепла возникают в потоке жидкости, имеющей радиоактивную взвесь, в потоке радиоактивного раствора, при прохождении электрического тока через электролит или жидкий металл и т. п. Наличие внутренних источников тепла сказывается на величине коэффициента теплоотдачи и на распределении температур в жидкости.

По своему физическому содержанию действие внутренних источников тепла близко к выделению тепла за счет трения при больших скоростях потока. Аналогично процессам теплообмена при течении газа с большой скоростью и в данном случае можно ввести понятие адиабатической температуры стенки. Под этой температурой понимают температуру, которую принимает стенка при отсутствии теплообмена с окружающей средой. В этом случае поле температур в жидкости будет обусловлено только действием внутренних источников тепла.

Особенности теплообмена при сверхкритическом состоянии вещества

Знание закономерностей теплообмена в около- и сверхкритической области параметров состояния вещества имеет особое значение для теплоэнергетики в связи с применением воды при сверхкритическом давлении в качестве рабочего тела на тепловых электрических станциях. Известно также, что на АЭС эффективно использовали воду при сверхкритических параметрах в первом контуре реакторов с естественной циркуляцией. Для воды $p_{кр}=22,12$ МПа, $T_{кр}=547,3$ К, а в критической точке энтальпия $i_{кр}=2150$ кДж/кг. Специфика гидродинамики и теплообмена в около- и сверхкритической области параметров состояния вещества состоит в том, что здесь своеобразно и немонотонно изменяются физические свойства теплоносителей в зависимости от

температуры и давления. Теплоемкость c_p , число Прандтля Pr имеют максимум при псевдокритической температуре T_m . Изменение свойств теплоносителя по радиусу и длине обогреваемой (или охлаждаемой) трубы приводит к тому, что внутри потока из-за разности плотностей в различных точках среды развивается свободная конвекция, изменяется характер турбулентных переносов теплоты и количества движения, деформируется профиль скорости, что в конечном счете сказывается на интенсивности теплоотдачи. Кроме того, в той части потока, где температура близка к T_m , вследствие резкого изменения плотности среды происходит ускорение теплоносителя (это ускорение называется термическим) при его нагревании и замедление при его охлаждении. Таким образом, термогравитационная конвекция и термическое ускорение – два фактора, которые могут оказывать существенное влияние на гидродинамику и теплообмен в случае применения теплоносителей при около- и сверхкритических параметрах.

Основными величинами, которые следует учитывать при анализе процесса теплообмена при течении теплоносителя со сверхкритическими параметрами, являются: среднемассовая энтальпия $i_{ж}$, тепловая нагрузка на поверхность нагрева q_c и массовая скорость ρv , которая равна отношению расхода теплоносителя к площади сечения трубы. На основании опытов приближенно можно считать, что для котлов, использующих воду со сверхкритическими параметрами, при $i_{ж} < 850$ кДж/кг теплоотдача подчиняется зависимости [18]

$$Nu = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,4}$$

или по формуле Петухова [21]

$$Nu = \frac{\frac{\xi}{8} Re Pr}{12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8} (Pr^{2/3} - 1) + 1,07}},$$

где ξ – коэффициент трения, $\xi = (1,82 \lg Re - 1,64)^{-2}$.

Если $i_{ж} > 850$ кДж/кг, существенное влияние на теплообмен оказывают значения q_c и ρv .

Особенности теплообмена при течении разреженного газа

При рассмотрении процессов конвективного теплообмена используется приближение сплошной среды, в котором газ считается континуумом, а его дискретным строением пренебрегаем. Однако при малых абсолютных давлениях (или малых размерах тел, участвующих в теплообмене с газом) явление передачи тепла можно объяснить только в том случае, если принять во внимание молекулярное строение вещества. При течении разреженного газа изменяются граничные условия. Газ, непосредственно прилегающий к поверхности омываемого тела, не имеет скорости и температуры поверхности тела, т. е. на границе раздела имеет место «скольжение» газа и скачок температур.

Контрольные вопросы

1. Поясните причины, а также методику расчета теплоотдачи и определения количества теплоты, отданного (полученного) в процессе теплоотдачи при течении жидкости с высокими скоростями.
2. Дайте определение собственной или адиабатической температуры стенки.
3. В каких случаях целесообразно в качестве теплоносителя применять жидкие металлы?
4. Запишите критериальное уравнение и поясните особенности теплоотдачи при течении в трубах жидких металлов.
5. В каких случаях в жидкости возникают внутренние источники тепла и какое действие они оказывают на теплоотдачу?
6. Приведите примеры использования теплоносителя при сверхкритическом состоянии.
7. Запишите критериальное уравнение для расчета теплоотдачи жидкости при сверхкритическом состоянии и поясните его особенности.
8. Можно ли пользоваться приближением сплошной среды для расчета теплоотдачи при течении разреженных газов?

МОДУЛЬ 3.

ТЕПЛОБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Лекция 19.

Описание процесса конденсации пара

Определение и классификация процессов конденсации. Теплообмен при конденсации чистых паров. Термодинамические условия протекания процесса, пленочная и капельная конденсация, связь расхода конденсата и теплового потока на стенке.

Определение и классификация процессов конденсации.

Теплообмен при конденсации чистых паров

Конденсация представляет собой процесс перехода пара (газа) в жидкое или твердое состояние (фазовый переход первого рода). На практике пар конденсируется на охлаждаемых трубах в конденсаторах паровых турбин, в некоторых опреснительных установках и многочисленных теплообменных аппаратах; образование жидких и кристаллических частиц воды происходит в облаках или инверсионном следе за самолетом. При конденсации пара происходит выделение тепла фазового перехода, поэтому процесс конденсации неразрывно связан с теплообменом [[5](#), [11](#), [18](#), [21](#), [22](#)].

Конденсация возможна только при докритических состояниях газа (пара) и может быть осуществлена путем его охлаждения или в результате такого сжатия, чтобы при достигнутых значениях температуры и давления конденсированная фаза была термодинамически более устойчивой, чем газообразная. Если при этом температура и давление больше их значений, соответствующих тройной точке для данного вещества, то образуется жидкая конденсированная фаза, если меньше – пар переходит в твердое состояние.

Конденсация может проходить как в объеме пара, так и на охлаждаемой поверхности теплообмена. В зависимости от условий конденсации рассматриваемый процесс имеет свои особенности и описывается различными законами. В энергетике чаще всего имеет место поверхностная конденсация паров в жидкое состояние на охлаждаемых поверхностях теплообмена. Будем полагать, что конденсирующийся пар не содержит примесей других паров или газов, т. е. является чистым. Конденсация насыщенного или перегретого

пара на твердой поверхности теплообмена происходит, если температура поверхности меньше температуры насыщения при данном давлении.

При первичном соприкосновении охлаждаемой стенки с паром поверхность тела покрывается адсорбированным мономолекулярным слоем пара, который затем уплотняется в тонкую жидкую пленку. По мере роста толщина пленки неправильно изменяется (флуктуирует), пока не достигнет некоторой критической величины, после чего дальнейшее увеличение толщины пленки происходит более или менее монотонно. Обычно образовавшаяся пленка конденсата растекается или стекает под действием силы тяжести и восполняется за счет непрерывно идущего процесса конденсации. Как показывают визуальные наблюдения и теоретические расчеты, ход процесса конденсации может усложниться неустойчивостью пленки в некотором интервале ее толщин. При некоторой критической толщине очень тонкая пленка (~ 1 мкм) может самопроизвольно расщепиться на большое количество капелек. После своего образования капли продолжают расти, достигнув определенных размеров, скатываются под действием силы тяжести. Одновременно продолжают процесс утолщения пленки и образование новых капелек.

Первый вид конденсации, когда жидкая конденсированная фаза образуется на поверхности теплообмена в виде сплошной устойчивой пленки, называется пленочной конденсацией, она имеет место, если конденсат смачивает данную поверхность теплообмена. Второй вид конденсации, когда происходит образование капель, – капельной, она имеет место, если конденсат не смачивает поверхность теплообмена. Эффект смачивания или несмачивания связан с действием сил поверхностного натяжения.

Как показывают наблюдения, при установившейся работе конденсационных устройств конденсат, как правило, смачивает поверхности теплообмена и в них идет пленочная конденсация пара. Капельная конденсация наблюдается при пуске теплообменного аппарата, когда на поверхности стенок имеются различные, в том числе и масляные, загрязнения; при конденсации ртутного пара. Она может быть вызвана искусственно с помощью специальных веществ, называемых лиофобизаторами (при конденсации водяного пара – гидрофобизаторами), которые наносятся на поверхность теплообмена или вводятся в пар или питательную воду.

При капельной конденсации водяного пара теплоотдача в 5–10 раз больше, чем при пленочной, так как пленка конденсата обладает большим термическим сопротивлением передаче освобождающегося тепла фазового перехода от поверхности конденсации к стенке. При капельной конденсации в силу разрыва пленки это термическое сопротивление гораздо меньше.

Термодинамические условия протекания процесса, пленочная и капельная конденсация, связь расхода конденсата и теплового потока на стенке

Интенсивность конденсации пара и происходящего при этом переноса тепла зависит от скорости протекания отдельных процессов, на которые можно расчленить общее явление: а) собственно процесс конденсации и б) отвод выделившейся теплоты парообразования от поверхности конденсации через слой конденсированной фазы.

Будем полагать в дальнейших рассуждениях, что поверхность конденсации плоская (или достаточно близка к плоской) и толщина слоя конденсата, находящегося на стенке, намного больше радиуса действия межмолекулярных сил (рис. 19.1). Термическое сопротивление передачи тепла от пара к стенке можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$R \equiv \frac{t_{\text{п}} - t_{\text{с}}}{q} \equiv \frac{1}{\alpha} = R_{\delta} + R_{\varphi}, \tag{19.1}$$

где $t_{\text{п}}$ и $t_{\text{с}}$ – соответственно, температуры пара и поверхности стенки; q – плотность теплового потока; α – коэффициент теплоотдачи от пара к стенке.

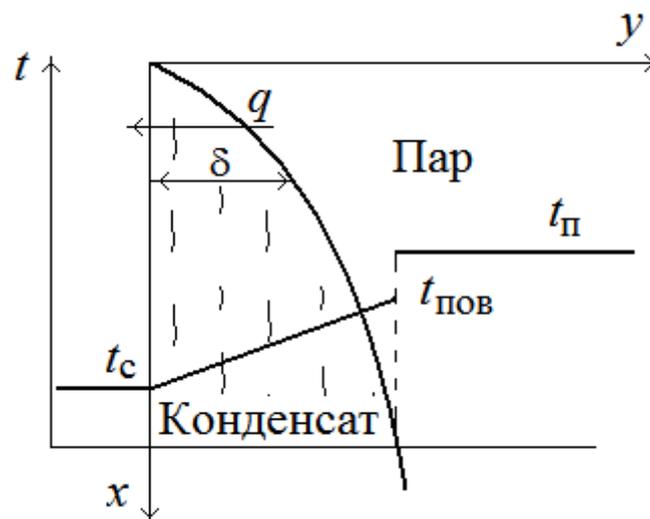


Рис. 19.1

Первое слагаемое R_{δ} в уравнении (19.1) представляет собой термическое сопротивление пленки конденсата. Второе слагаемое R_{φ} , которое назовем термическим сопротивлением фазового перехода, определяется результирующей скоростью притока пара к поверхности конденсации. Второе со-

противление не является термическим сопротивлением в его обычном понимании, предполагающем перенос тепла.

Согласно кинетической теории материи на поверхности раздела фаз должен иметь место скачок температуры, потому что количество молекул пара, ударяющихся о поверхность жидкости и захватываемых ею (конденсирующихся), превосходит количество молекул, отрывающихся (испаряющихся) за то же время от поверхности жидкости вследствие теплового движения. Превышение количества захватываемых молекул над количеством испускаемых и приводит к видимому процессу конденсации. Кроме того, не все молекулы, достигшие поверхности, захватываются жидкостью, часть из них отражается. Для чистого водяного пара с достаточным приближением можно считать, что температурный скачок на границе раздела фаз отсутствует, т.е. все молекулы, подошедшие к поверхности, захватываются жидкостью, поэтому термическое сопротивление фазового перехода равно нулю. Для других веществ данных о процессе конденсации недостаточно, поэтому для них допускается это же предположение.

Термическое сопротивление пленки конденсата зависит от режима течения. Поперек ламинарно текущей пленки теплота переносится за счет теплопроводности, через турбулентную – дополнительно и конвекцией. Критическое число Рейнольдса $Re = \bar{w}\delta / \nu_{ж}$, определяющее границу ламинарного и турбулентного режимов, разными авторами из опыта дается в интервале $60 \leq Re \leq 500$. Наиболее вероятным считается $Re = 400$.

Ламинарное течение жидкой пленки может сопровождаться волновым движением. Возникшее под действием случайных возмущений волновое движение приводит к снижению эффективной толщины пленки конденсата, что в свою очередь вызывает уменьшение термического сопротивления и, следовательно, увеличение количества передаваемого при конденсации тепла. Из эксперимента следует, что волновой режим наблюдается при $Re \approx 5$.

В процессе конденсации расход конденсата тесно связан с тепловым потоком. При конденсации сухого насыщенного пара последним отдается теплота фазового перехода r . Кроме того, поскольку температура поверхности стенки t_c меньше температуры поверхности конденсата $t_{пов}$, соприкасающейся с паром, стенке отдается и часть тепла конденсата. Происходит переохлаждение конденсата в среднем до температуры, которая лежит между t_c и $t_{пов}$. Во многих практически важных случаях теплота переохлаждения пренебрежимо мала по сравнению с теплом фазового перехода, тогда $Q = r G$.

В дальнейшем при рассмотрении конкретных задач теплообмена будем различать случаи конденсации движущегося и неподвижного пара. При движении пара силы трения, возникающие на границе раздела фаз, могут как подтормаживать, так и ускорять пленку конденсата в зависимости от взаимного направления движения конденсата и пара. В результате может изме-

няться толщина пленки и, как следствие, термическое сопротивление и теплоотдача.

При конденсации пар не может быть абсолютно неподвижным, если плотность жидкой фазы $\rho_{ж}$ отличается от плотности паровой фазы $\rho_{п}$. При состояниях, далеких от критических, $\rho_{ж} \gg \rho_{п}$. Объемы пара, конденсирующиеся у стенки, сейчас же восполняются новыми порциями пара, притекающими из основной массы последнего, поэтому пар всегда находится в движении. При конденсации неограниченного объема пара на плоской стенке пар перемещается нормально к ней со средней скоростью $\bar{w}_{п} = q / (r\rho_{п})$, тогда при атмосферном давлении и $q = 3 \cdot 10^5$ Вт/м² будет $w = 0,23$ м/с для насыщенного водяного пара. Эта скорость еще не оказывает заметного динамического воздействия на пленку конденсата и поэтому пар может считаться неподвижным. В этом смысле и будет в дальнейшем употребляться термин «неподвижный пар».

Контрольные вопросы

1. Дайте определение процесса конденсации. Приведите примеры этого явления в природе и технике.
2. Поясните термодинамические условия, при которых пар переходит в жидкую фазу или в твердое состояние.
3. Какой пар называют чистым? Насыщенным? Перегретым?
4. В чем заключается отличие пленочной конденсации от капельной? В каком случае и почему будет выше коэффициент теплоотдачи?
5. Поясните механизм процесса конденсации чистого пара с точки зрения молекулярно-кинетической теории.
6. Опишите стадии процесса конденсации.
7. Как определяют число Рейнольдса для пленки конденсата? При каких значениях числа Рейнольдса происходит ламинарное течение пленки конденсата?
8. Для каких значений числа Рейнольдса характерно образование волн на поверхности пленки конденсата? К чему приводит волновое движение?
9. Какой пар называют неподвижным?
10. Как влияет скорость движения пара на процесс теплоотдачи?

Лекция 20. Теплоотдача при конденсации неподвижного пара

Уравнение Нуссельта. Анализ допущений и обоснование поправок к формулам Нуссельта. Пленочная конденсация неподвижного пара на поверхности вертикальной плоскости и горизонтального цилиндра. Определяющий критерий подобия в задачах конденсации. Конденсация при смешанном течении пленки конденсата. Капельная конденсация пара.

Уравнение Нуссельта. Анализ допущений и обоснование поправок к формулам Нуссельта

На вертикальной стенке, температура поверхности которой всюду равна t_c , конденсируется сухой насыщенный пар. Течение пленки имеет ламинарный характер. Будем рассматривать стационарную задачу и полагать, что размер стенки в направлении оси z бесконечно велик (см. [рис. 19.1](#)). Примем следующие допущения:

- 1) силы инерции, возникающие в пленке конденсата, пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости и силами тяжести;
- 2) конвективный перенос тепла в пленке и теплопроводность вдоль нее не учитываются; учитывается теплопроводность только поперек пленки;
- 3) трение на границе раздела фаз отсутствует;
- 4) температура внешней поверхности пленки конденсата постоянная и равна температуре насыщения t_n ;
- 5) физические параметры конденсата не зависят от температуры;
- 6) силы поверхностного натяжения на свободной поверхности пленки не влияют на характер ее течения;
- 7) плотность пара мала по сравнению с плотностью конденсата.

Принятые допущения позволяют существенно упростить математическую формулировку задачи.

Левая часть уравнения энергии равна нулю, так как процесс стационарный и конвективный перенос тепла не учитывается. Кроме того, будут равны нулю и производные $\partial^2 t / \partial x^2$ и $\partial^2 t / \partial z^2$, так как перенос тепла теплопроводностью учитывается только поперек пленки. Тогда

$$d^2 t / dy^2 = 0.$$

Уравнение движения в проекциях на оси y и z не учитываем. Пленка движется в направлении оси x . Левая часть уравнения движения в проекциях на ось x равна нулю, так как задача стационарная и инерционные силы счи-

таются пренебрежимо малыми. Отсюда следует, что составляющая скорости w_x не меняется вдоль оси x и $\partial^2 w_x / \partial x^2 = 0$. Кроме того, $\partial^2 w_x / \partial z^2 = 0$ (так как размер стенки по z бесконечен). Производная $\partial p / \partial x = 0$, так как изменение давления вдоль оси x определяется изменением гидростатического давления пара: плотность пара мала по сравнению с плотностью жидкости и высота невелика. Тогда уравнение движения будет

$$\mu_{\text{ж}} \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\rho_{\text{ж}} g.$$

Граничные условия: при $y = 0$ $t = t_c$ и $w_x = 0$; при $y = \delta$ $t = t_n$ и $\partial w_x / \partial y = 0$ (так как пренебрегаем трением на границе раздела фаз).

Интегрирование уравнения энергии дает $\frac{dt}{dy} = \frac{t_n - t_c}{\delta}$. Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha \equiv \frac{|q|}{t_n - t_c} = \frac{\lambda_{\text{ж}} \cdot dt / dy}{t_n - t_c} = \frac{\lambda_{\text{ж}} (t_n - t_c)}{\delta (t_n - t_c)} = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta}.$$

Для решения задачи нужно определить δ .

Толщина пленки конденсата будет зависеть от количества образовавшегося конденсата (расхода) в интересующем нас сечении: $G = \rho_{\text{ж}} \bar{w} \delta \cdot 1$. Через сечение, лежащее ниже на величину dx , протекает жидкости больше на $dG = d(\rho_{\text{ж}} \bar{w} \delta)$. Этот прирост расхода происходит за счет конденсации. Если полагать, что тепло, отданное стенке, есть теплота фазового перехода, т.е. если пренебречь теплотой переохладения конденсата, то $G \equiv \frac{q}{r} \cdot dx \cdot 1$, где q/r – количество конденсата, образующегося на единице поверхности в единицу времени. С другой стороны,

$$q = \lambda_{\text{ж}} \frac{dt}{dy} = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta} (t_n - t_c) \quad \text{и} \quad dG = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta} \frac{1}{r} (t_n - t_c) dx.$$

Приравнивая оба выражения для расхода, получаем:

$$d(\rho_{\text{ж}} \bar{w} \delta) = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta} \frac{1}{r} (t_n - t_c) dx. \quad (20.1)$$

Определим среднюю скорость жидкости в рассматриваемом сечении. Из уравнения движения

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\frac{\rho_{жg}}{\mu_{ж}} = \text{const},$$

следовательно,

$$\frac{dw_x}{dy} = -\frac{\rho_{жg}}{\mu_{ж}} y + C_1 \quad \text{и} \quad w_x = -\frac{\rho_{жg}}{2\mu_{ж}} y^2 + C_1 y + C_2.$$

Используя граничные условия, получаем:

$$C_1 = \frac{\rho_{жg}}{\mu_{ж}} \delta \quad \text{и} \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$w_x = -\frac{\rho_{жg}}{2\mu_{ж}} y^2 + \frac{\rho_{жg}\delta}{\mu_{ж}} y,$$

а средняя скорость

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy = -\frac{\rho_{жg}}{\mu_{ж}} \left(\frac{1}{2\delta} \int_0^{\delta} y^2 dy - \int_0^{\delta} y dy \right) = \frac{\rho_{жg}}{3\mu_{ж}} \delta^2.$$

Подставим полученное значение средней скорости в уравнение (20.1):

$$d \left(\frac{\rho_{жg}^2 \delta^3}{3\mu_{ж}} \right) = \frac{\lambda_{ж}}{\delta} \frac{1}{r} (t_n - t_c) dx$$

или

$$\frac{r\rho_{жg}^2}{\lambda_{ж}\mu_{ж}} \delta^3 d\delta = (t_n - t_c) dx.$$

Проинтегрировав, получаем:

$$\frac{r\rho_{жg}^2}{4\lambda_{ж}\mu_{ж}} \delta^4 = (t_n - t_c) x + C.$$

Из граничных условий $C = 0$, тогда

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda_{ж}\mu_{ж}(t_n - t_c)x}{r\rho_{жg}^2}}.$$

Местный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{r \rho_{\text{ж}}^2 g \lambda_{\text{ж}}^3}{4 \mu_{\text{ж}} (t_{\text{н}} - t_{\text{с}}) x}}$$

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha dx = \frac{4}{3} \alpha_{x=h} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{r \rho_{\text{ж}}^2 g \lambda_{\text{ж}}^3}{4 \mu_{\text{ж}} (t_{\text{н}} - t_{\text{с}}) h}}$$

Уравнение, впервые полученное Нуссельтом в 1916 г.,

$$\bar{\alpha} = 0,943 \sqrt[4]{\frac{r \rho_{\text{ж}}^2 g \lambda_{\text{ж}}^3}{\mu_{\text{ж}} (t_{\text{н}} - t_{\text{с}}) h}}$$

При выводе этого уравнения не были учтены: трение на границе раздела фаз, переменность физических параметров, конвективный перенос тепла и силы инерции, а также возможное волновое движение пленки, изменяющее ее толщину. Для учета этих явлений используют соответствующие поправки, тогда коэффициент теплоотдачи определяют как $\alpha = \alpha_N \varepsilon_{\psi} \varepsilon_t \varepsilon_v$, где α_N – коэффициент теплоотдачи, вычисленный по формуле Нуссельта; ε_{ψ} – поправка, учитывающая конвективный перенос тепла и силы инерции; ε_t – зависимость физических параметров от температуры; ε_v – поправка на волновой характер течения пленки конденсата.

Пленочная конденсация неподвижного пара на поверхности вертикальной плоскости и горизонтального цилиндра. Определяющий критерий подобия в задачах конденсации

Для ламинарного течения пленки конденсата вдоль вертикальной стенки было получено уравнение Нуссельта. Средний коэффициент теплоотдачи в критериальной форме [20]

$$\text{Re} = 3,8 \cdot Z^{0,78},$$

где $\text{Re} = \alpha \Delta t H \frac{4}{r \rho v}$; $Z = \Delta t H \left(\frac{g}{v^2} \right)^{1/3} \frac{\lambda}{r \rho v}$ – приведенная длина трубы; H –

высота вертикальной стенки или трубы; λ , μ и ρ – коэффициент теплопроводности, вязкость и плотность конденсата при температуре насыщения $t_{\text{н}}$ соответственно. Формула справедлива при $\text{Re} < 1600$ и $Z < 2300$.

Значения комплексов физических свойств, входящих в выражения для Re и Z , $A = \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \frac{\lambda}{r\rho v}$ и $B = \frac{4}{r\rho v}$ зависят только от рода жидкости и температуры насыщения. [3].

Пленочная конденсация сухого насыщенного пара на наклонных стенках и горизонтальных трубах. Полученные ранее формулы справедливы при конденсации пара на вертикальных плоских стенках. В случае наклонной стенки в исходные уравнения движения вместо g необходимо ввести его проекцию на ось x $g_x = g \cos \varphi$, где φ – угол, образованный направлением вектора g и осью x , тогда $\alpha_{накл} = \alpha_{верт} \sqrt[4]{\cos \varphi}$.

Для криволинейной поверхности, в частности горизонтального цилиндра, угол φ будет переменной величиной. Учитывая это, средний по периметру коэффициент теплоотдачи при ламинарном течении пленки можно определить по формуле

$$Re = 3,25 \cdot Z^{0,75}, \quad (20.2)$$

где $Re = \alpha \Delta t \pi R \frac{4}{r\rho v}$; $Z = \Delta t \pi R \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \frac{\lambda}{r\rho v}$ – приведенная длина трубы; R – радиус трубы. Формула справедлива при $Z < 3900$.

Конденсация при смешанном течении пленки конденсата

Турбулентное течение пленки конденсата вдоль вертикальной стенки наступает при местных значениях числа Рейнольдса $Re = wx/v > 400$. Таким образом, в верхней части пленки течение продолжает оставаться ламинарным, а на стенке будет смешанное течение жидкости. Если значение приведенной длины больше критического $Z > 2300$, то режим течения пленки конденсата в нижней части трубы турбулентный. Тогда при пленочной конденсации сухого насыщенного пара на вертикальной поверхности и смешанном режиме течения пленки конденсата средний по длине коэффициент теплоотдачи можно определить по следующей формуле [20]:

$$Re = \left[253 + 0,069 \left(\frac{Pr}{Pr_c}\right)^{0,25} Pr^{0,5} (Z - 2300) \right]^{4/3},$$

где Pr и Pr_c – числа Прандтля для конденсата при температурах t_n и t_c .

Капельная конденсация пара

В общем случае при капельной конденсации на поверхности теплообмена возможно одновременное существование и отдельных капель, и пленки конденсата. В настоящее время не разработана достаточно строгая теория теплообмена при капельной конденсации, поэтому для инженерных расчетов используют уравнения подобия теплообмена [32]:

$$Nu = 3,2 \cdot 10^{-4} Re_*^{0,84} \Pi_k^{1,16} Pr^{1/3} \quad \text{при} \quad 8 \cdot 10^{-4} \leq Re_* \leq 3,3 \cdot 10^{-3};$$

$$Nu = 5 \cdot 10^{-6} Re_*^{-1,57} \Pi_k^{1,16} Pr^{1/3} \quad \text{при} \quad 3,3 \cdot 10^{-3} \leq Re_* \leq 1,8 \cdot 10^{-2},$$

где
$$Nu_* = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda_{ж}} = \frac{\alpha 2\sigma T_H}{\lambda_{ж} r \rho_{ж} (t_H - t_{ст})}; \quad Re_* = \frac{\lambda_{ж} (t_H - t_{ст})}{\rho_{ж} v_{ж}}; \quad \Pi_k = \frac{2\xi \sigma^2 T_H}{r \rho_{ж}^2 v_{ж}^2}.$$

Контрольные вопросы

1. Перечислите допущения, необходимые для вывода уравнения Нуссельта, описывающего конденсацию неподвижного пара.
2. Запишите систему дифференциальных уравнений, описывающих конденсацию неподвижного пара, укажите особенности ее решения.
3. Запишите уравнение Нуссельта для конденсации неподвижного пара. Схематически изобразите зависимость коэффициента теплоотдачи и толщины пленки конденсата от высоты стенки.
4. Из-за влияния каких физических процессов уравнение Нуссельта не точно описывает пленочную конденсацию неподвижного пара.
5. Запишите критериальные уравнения, описывающие пленочную конденсацию неподвижного пара на вертикальной стенке (ламинарное и смешанное течение пленки конденсата) и на горизонтальной трубе. Поясните алгоритм вычисления коэффициента теплоотдачи по этим формулам.
6. Какой коэффициент теплоотдачи выше и почему для горизонтальной трубы или для вертикальной стенки?
7. Поясните особенности капельной конденсации неподвижного пара.
8. Запишите критериальные уравнения для расчета теплоотдачи при капельной конденсации пара.

Лекция 21. Теплоотдача при конденсации движущегося пара

Конденсация движущегося пара на одиночной трубе. Конденсация движущегося пара на горизонтальном пучке труб. Изменение расхода и скорости пара. Коэффициент теплоотдачи на отдельной трубе. Средний коэффициент теплоотдачи пучка труб.

Конденсация движущегося пара на одиночной трубе

Процесс теплообмена при конденсации пара внутри труб более сложный, так как ограничен стенками трубы. Трубы могут быть достаточно длинными, и в них может конденсироваться большое количество пара. Пар поступает в трубу из внешней среды и, продвигаясь вдоль трубы, конденсируется. Возникает направленное движение пара, причем скорости последнего могут быть очень велики (до 100 м/с и более). При этом силы трения на границе между паром и конденсатом могут быть значительными.

Если направление движения пара совпадает с направлением течения конденсата под действием силы тяжести, то из-за трения течение пленки убыстряется, толщина ее уменьшается, а теплоотдача увеличивается. Если наоборот, то – уменьшается. Повышение скорости пара может привести к тому, что пленка будет увлечена паром и частично сорвана с поверхности стенки, при этом теплоотдача увеличится.

Таким образом, при конденсации пара в трубе теплоотдача помимо факторов, рассмотренных в предыдущих случаях, может зависеть от динамического воздействия пара на пленку конденсата. Это воздействие зависит от направлений сил тяжести и сил трения. Взаимное направление этих сил определяется не только положением трубы в пространстве, но и зависит от того, входит ли пар в вертикальную (или наклонную) трубу сверху или снизу.

В зависимости от величин сил тяжести и сил трения можно различить три основных случая: 1) силы тяжести существенно преобладают над динамическим воздействием пара, и последний можно считать практически неподвижным, как в предыдущих случаях; 2) силы тяжести и силы динамического воздействия на пленку соизмеримы; 3) динамическое воздействие пара на пленку конденсата преобладает над силами тяжести, при этом конденсат движется, увлекаемый паром, и теплоотдача практически не зависит от положения трубы в пространстве.

Конденсат может заполнить всю трубу или ее часть. Течение пленки может быть как ламинарным, так и турбулентным. Величина силы трения на границе раздела фаз зависит от режима течения. Особенно сложен второй

случай, когда силы тяжести и силы трения соизмеримы. В этом случае движение пленки конденсата может происходить как вдоль, так и по окружности трубы, причем режим течения на различных участках может быть разный. Все эти особенности процесса существенно затрудняют получение точных зависимостей.

Для промышленной практики наиболее важны данные о конденсации движущегося пара на горизонтальных трубах. При конденсации движущегося сухого насыщенного водяного пара на одиночной горизонтальной трубе коэффициент теплоотдачи при $w_{\text{п}}^2 \rho'' < 1$ можно рассчитывать без учета влияния скорости движения пара на теплоотдачу, т. е. по формуле (20.2). При значениях $w_{\text{п}}^2 \rho'' > 1$ необходимо учитывать влияние скорости движения пара на теплоотдачу. В этом случае коэффициент теплоотдачи можно рассчитать по формуле [18]

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\text{н}}} = 28,3 \Pi^{0,08} \text{Nu}_{\text{н}}^{-0,58}, \quad (21.1)$$

где $\alpha_{\text{н}}$ – значение коэффициента теплоотдачи для неподвижного пара, рассчитанное по формуле (20.2): $\Pi = \frac{w_{\text{п}}^2 \rho'' \alpha_{\text{н}}}{g \rho' \lambda}$; $\text{Nu}_{\text{н}} = \frac{\alpha_{\text{н}} d}{\lambda}$; $w_{\text{п}}$ – скорость набегающего потока пара; ρ'' – плотность пара при температуре $t_{\text{н}}$; ρ' и λ – плотность и коэффициент теплопроводности конденсата при температуре $t_{\text{н}}$, соответственно. Формула применима при давлениях пара от 5 до 100 кПа, температурных напорах $\Delta t = t_{\text{н}} - t_{\text{с}}$ от 2 до 20 °С и $\Pi < 800$.

Конденсация движущегося пара на горизонтальном пучке труб

Конденсационные аппараты, как правило, имеют не одну трубку, а пучок труб, размещенный в шахматном или коридорном порядке. Процессы конденсации на наружной поверхности одиночной трубы и пучка труб различны из-за уменьшения скорости пара при его движении в пучке из-за частичной конденсации и увеличения толщины пленки конденсата за счет последовательного стекания его с трубки на трубку.

Уменьшение скорости пара по мере его движения через пучок приводит к по-

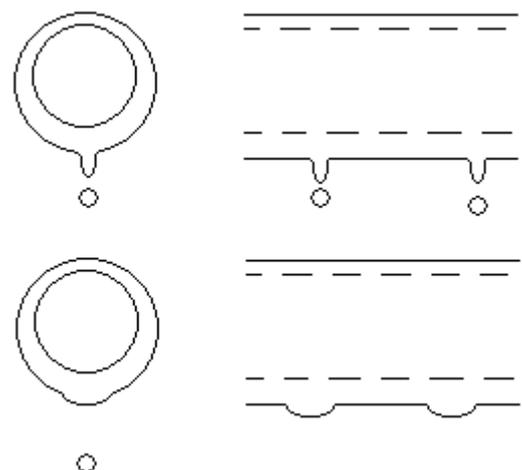


Рис. 21.1

следовательно уменьшению теплоотдачи при возрастании номера ряда. К такому же эффекту приводит и сток конденсата с верхних труб на нижние. Однако сток конденсата в этом случае отличается от движения по вертикальной стенке, так как конденсат стекает не в виде сплошной пленки, а отдельными каплями или струйками (рис. 21.1). Капли, попадая на нижележащую трубу, с одной стороны, утолщают пленку жидкости, с другой стороны, возмущают течения, образуя волны. Места отрыва и падения перемещаются вдоль трубы, особенно если есть хотя бы небольшой наклон. Волнообразная струя конденсата перемещается вдоль нижней части трубки. Увеличение термического сопротивления за счет толщины компенсируется возникающими возмущениями.

При конденсации водяного пара на горизонтальных трубных пучках, обтекаемых сверху вниз чистым водяным паром, значения коэффициента теплоотдачи по рядам труб можно определить по следующей приближенной методике [18, 20]:

А. Производится последовательный расчет количества пара ΔG_n , конденсирующегося на трубках каждого ряда, расхода пара G_n и коэффициента теплоотдачи α_n' по рядам. При этом

$$\Delta G_n = \frac{\alpha_n' F_n \Delta t}{r},$$

$$G_{n+1} = G_n - \Delta G_n,$$

где

$$\frac{\alpha_n'}{\alpha_1} = \left(\frac{w_n}{w_1} \right)^{0,16}.$$

Здесь F_n – площадь поверхности теплообмена рассматриваемого ряда труб; w_1 и w_n – скорости потока пара перед первым и n -м рядами.

Б. Определяются поправки на влияние стекания конденсата:

$$\varepsilon_n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i}{\Delta G_n} \right)^{-0,07},$$

где $\sum_{i=1}^n \Delta G_i$ – суммарное количество конденсата, стекающего по n -й трубе;

ΔG_n – количество конденсата, образующегося на n -й трубе.

В. Значение коэффициента теплоотдачи для n -го ряда с учетом влияния скорости пара и стекания конденсата определяется как

$$\alpha_n = \alpha_n' \varepsilon_n.$$

Средний коэффициент теплоотдачи для всего трубного пучка

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i,$$

где F_i – площадь поверхности теплообмена отдельных труб; F – общая площадь поверхности теплообмена.

Если все трубы в пучке одинаковые, то средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Рассмотрим применение данной методики на примере решения следующей задачи. Необходимо определить средний по длине коэффициент теплоотдачи от пара к трубам конденсатора, выполненного в виде горизонтального коридорного трубного пучка, состоящего из $n = 14$ рядов труб по высоте. Наружный диаметр труб $d = 16$ мм. Шаг труб по горизонтали $s = 1,25d$. Поверхность теплообмена всех рядов труб в пучке одинакова. На поверхности труб конденсируется сухой насыщенный водяной пар под давлением $p = 9,8$ кПа, движущийся сверху вниз. Скорость потока пара перед верхним рядом труб $\omega_1 = 35$ м/с. Температура поверхности всех трубок $t_c = 35$ °С. При расчете принять давление пара и температурный напор неизменным по высоте пучка.

В рассматриваемой задаче сначала определяем коэффициент теплоотдачи для неподвижного пара.

При $p = 9,8$ кПа, $t_s = 45,5$ °С $A = 13,7$ 1/(м·°С); $B = 2,83 \cdot 10^{-3}$ м/Вт.

Температурный напор $\Delta t = t_s - t_c = 45,5 - 35 = 10,5$ °С.

$$\alpha_n = 3,25 \frac{A^{0,75}}{B} \frac{1}{(\pi R \Delta t)^{0,25}} = 3,25 \frac{(13,7)^{0,75}}{2,83 \cdot 10^{-3}} \times$$

$$\times \frac{1}{(3,14 \cdot 0,008 \cdot 10,5)^{0,25}} = 11300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°С}).$$

Расчет коэффициента теплоотдачи для первого ряда пучка с учетом влияния скорости пара проведем по следующей методике.

При $t_s=45,5$ °C $\rho''=0,0668$ кг/м³; $\rho'=991$ кг/м³; $\lambda=0,645$ Вт/(м·°C);
 $r=2393$ кДж/кг.

$$Nu_H = \frac{\alpha_H d}{\lambda} = \frac{1,13 \cdot 10^4 \cdot 1,6 \cdot 10^2}{0,645} = 281;$$

$$\Pi = \frac{\omega_1^2 \rho'' \alpha_H}{g \rho' \lambda} = \frac{35^2 \cdot 0,0668 \cdot 1,13 \cdot 10^4}{9,81 \cdot 991 \cdot 0,645} = 147;$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_H} = 28,3 \Pi^{0,08} Nu_H^{-0,58} = 28,3 \cdot 147^{0,08} \cdot (281)^{-0,58} = 1,6,$$

откуда

$$\alpha_1 = 1,6 \alpha_H = 1,6 \cdot 11300 = 18100 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}.$$

Количество пара, конденсирующегося на 1 м трубки первого ряда,

$$\begin{aligned} \Delta G_1 &= \frac{\alpha_1 \Delta t \pi d}{r} = \frac{1,81 \cdot 10^4 \cdot 10,5 \cdot 3,14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}}{2393 \cdot 10^3} = \\ &= 3,98 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, \end{aligned}$$

или

$$\Delta G_1 = 3,98 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 14,3 \text{ кг/(м} \cdot \text{ч)}.$$

Расход пара на 1 м трубки первого ряда

$$G_1 = \omega_1 \rho'' \cdot 3600 = 35 \cdot 0,0688 \cdot 1,25 \cdot 0,016 \cdot 3600 = 168 \text{ кг/(м} \cdot \text{ч)}.$$

Расход пара на 1 м трубки второго ряда

$$G_2 = G_1 - \Delta G_1 = 168 - 14,3 = 153,7 \text{ кг/(м} \cdot \text{ч)}.$$

Так как по условиям задачи геометрические характеристики всех рядов труб одинаковы, то

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{G_2}{G_1} = \frac{153,7}{168} = 0,915 \text{ и } w_2 = 0,915 \cdot 35 = 32 \text{ м/с.}$$

Имеем:

$$\frac{\alpha'_2}{\alpha_1} = \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{0,16} = (0,915)^{0,16} \approx 0,985,$$

и так как p , Δt , r и d постоянны по всем рядам, то

$$\Delta G_2 = \Delta G_1 \frac{\alpha_2'}{\alpha_1} = 14,3 \cdot 0,985 = 14,1 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{ч}).$$

Аналогичным образом рассчитываются значения ΔG_i , ω_i и α_i'/α_1 по рядам. Результаты расчета приведены в [табл. 21.1](#).

Таблица 21.1

Номер ряда	Q , кг/(м·ч)	w , м/с	α_i'/α_1	ΔG , кг/(м·ч)	ε	$\alpha_{i,2}$ Вт/(м ² ·°С)
1	168	35,0	1,00	14,3	1,0	18 100
2	153,7	32,0	0,985	14,1	0,954	17 000
3	139,6	29,0	0,97	13,9	0,927	16 300
4	125,7	26,1	0,953	13,6	0,910	15 700
5	112,1	23,4	0,936	13,4	0,893	15 100
6	98,7	20,6	0,918	13,1	0,88	14 500
7	85,6	17,8	0,9	12,9	0,87	14 150
8	72,7	15,1	0,875	12,5	0,861	13 550
9	60,2	12,5	0,85	12,1	0,853	13 100
10	48,1	10,0	0,82	11,7	0,845	12 500
11	36,4	7,6	0,785	11,2	0,837	11 850
12	25,2	5,25	0,738	10,5	0,83	11 050
13	14,7	3,06	0,68	9,7	0,822	10 100
14	5,0	1,04	0,625	5,0	0,814	9 200

В значения коэффициентов теплоотдачи вносим поправку на уменьшение их за счет стекания конденсата:

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\Delta G_1 + \Delta G_2}{\Delta G_2} \right)^{-0,07} = \left(\frac{14,3 + 14,1}{14,1} \right)^{-0,07} = 0,954 ;$$

$$\alpha_2 = \alpha_2' \varepsilon_2 = \alpha_1 \frac{\alpha_2'}{\alpha_1} \varepsilon_2 = 18100 \cdot 0,985 \cdot 0,954 = 17100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°С})$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \Delta G_3}{\Delta G_3} \right)^{-0,07} = \left(\frac{14,3 + 14,1 + 13,9}{13,9} \right)^{-0,07} = 0,927 ;$$

$$\alpha_3 = 18100 \cdot 0,97 \cdot 0,927 = 16300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°С}).$$

Просуммировав значения α_i , приведенные в последнем столбце [табл. 21.1](#), и разделив эту сумму на число рядов $n = 14$, найдем: $\alpha = 13 700 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°С})$.

Контрольные вопросы

1. Как влияет на процесс теплоотдачи движение пара внутри трубы, если труба вертикальная или горизонтальная?
2. При выполнении какого условия конденсацию движущегося пара можно рассчитывать по формулам для неподвижного пара?
3. Как учитывают влияние скорости движения пара на теплоотдачу при пленочной конденсации движущегося пара на одиночной горизонтальной трубе?
4. К чему приводит стекание пленки конденсата с верхних рядов на нижние при конденсации движущегося пара на горизонтальных пучках труб?
5. Какие процессы необходимо учитывать при расчете теплоотдачи движущегося пара на трубных пучках?
6. Как и почему меняется коэффициент теплоотдачи в зависимости от номера ряда при конденсации пара на пучке труб?
7. Поясните алгоритм расчета среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации движущегося пара на горизонтальном пучке труб.

Лекция 22.**Описание процесса кипения жидкости**

Условия зарождения паровой фазы в объеме перегретой жидкости и на твердой поверхности. Динамика паровых пузырьков при кипении. «Кривая кипения». Изменение структуры двухфазного потока по длине парогенерирующего канала.

**Условия зарождения паровой фазы
в объеме перегретой жидкости и на твердой поверхности.
Динамика паровых пузырьков при кипении**

Процессы кипения имеют большое значение в теплотехнике, атомной энергетике, химической технологии и ряде других областей современной техники. К настоящему времени выполнено большое количество работ, посвященных исследованию условий протекания кипения жидкостей и соответствующих закономерностей переноса тепла [5, 18, 21, 32].

Кипение возможно во всем температурном интервале между тройной и критическими точками для данного вещества. В процессе фазового превращения поглощается теплота парообразования, поэтому процесс кипения всегда связан с подводом тепла к кипящей системе.

Различают кипение жидкости на твердой поверхности теплообмена, к которой извне подводится тепло, и кипение в объеме жидкости.

При кипении на твердой поверхности образование паровых пузырьков наблюдается в отдельных местах этой поверхности. При объемном кипении паровая фаза возникает непосредственно в объеме жидкости в виде отдельных пузырьков пара. Объемное кипение может происходить лишь при значительном перегреве жидкой фазы относительно температуры насыщения при данном давлении. Значительный перегрев может быть получен, например, при быстром сбросе давления в системе. Объемное кипение может иметь место при наличии в жидкости внутренних источников тепла.

В современной энергетике и технике обычно встречаются процессы кипения на твердых поверхностях нагрева (поверхности труб, стенки каналов и т.д.). Этот вид кипения и будет в основном рассматриваться далее.

Механизм теплообмена при пузырьковом кипении отличается от теплоотдачи при конвекции однофазной жидкости наличием переноса массы вещества и тепла паровыми пузырями из пограничного слоя в объем кипящей жидкости. Для возникновения процесса кипения необходимо выполнение двух условий: наличие перегрева жидкости относительно температуры насыщения и наличие центров парообразования.

Перегрев жидкости имеет максимальную величину непосредственно у обогреваемой поверхности теплообмена. На ней же находятся центры парообразования в виде отдельных неровностей стенки, пузырьков воздуха, пылинок и т.д. Поэтому образование пузырьков пара происходит преимущественно непосредственно на поверхности теплообмена.

При пузырьковом кипении жидкости основной поток тепла от поверхности нагрева передается жидкой фазе, так как она обладает значительно большей теплопроводностью, чем паровая фаза. Поэтому, как и в случае конвекции однофазной жидкости, основным тепловым сопротивлением при кипении является тепловое сопротивление пограничного слоя жидкости. Однако периодический процесс роста и отрыва отдельных паровых пузырьков от стенки, а также всплывание их вызывает сильное движение, турбулизацию жидкости, частично разрушающие пристеночный слой, что приводит к значительному увеличению интенсивности теплоотдачи по сравнению с конвекцией однофазной жидкости.

Чтобы паровой пузырек мог возникнуть в перегретой жидкости и существовать в дальнейшем, необходимо, чтобы давление пара p_1 в нем было не меньше суммы всех сил, действующих на паровой пузырек. В момент образования пузырька на него действуют две основные силы: сила давления окружающей его жидкости p и поверхностное натяжение самой поверхности пузырька. Условие равновесия определяется уравнением Лапласа: $\Delta p = p_1 - p = 2\sigma / R_k$, где $R_k = 2\sigma / \Delta p$ – минимальный или критический радиус пузырька в момент зарождения. При $\Delta p \geq 2\sigma / R_k$ паровой пузырек может существовать и развиваться; при $\Delta p \leq 2\sigma / R_k$ он сконденсируется. Определив величину разности давления как функцию температуры, получим значение критического радиуса в объеме жидкости $R_k = 2\sigma T_n / [r p_n (T_{ж} - T_n)]$ и на стенке $R_k = 2\sigma T_n / [r p_n (T_c - T_n)]$. Так как температура стенки больше, чем

температура жидкости, то на стенке значение критического радиуса меньше. Кроме того, на стенке больше центров кипения.

«Кривая кипения»

Хотя процесс кипения зависит от большого количества факторов, качественная зависимость коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока от температурного напора остается идентичной в большом диапазоне условий. На [рис. 22.1](#) эта зависимость приведена для воды при давлении 1 бар.

При низком температурном напоре (область 1) наблюдается слабое кипение. В этой области теплоотдача осуществляется в основном за счет конвекции однофазной жидкости. Коэффициент теплоотдачи здесь является степенной функцией температуры $\alpha \approx t^n$ с $n = 0-1/3$. При увеличении температурного напора на поверхности усиливается парообразование: благодаря увеличению перегрева жидкости начинают действовать новые центры парообразования. Отрывающиеся от поверхности и всплывающие пузырьки активно перемешивают пристенный слой жидкости, что увеличивает коэффициент теплоотдачи.

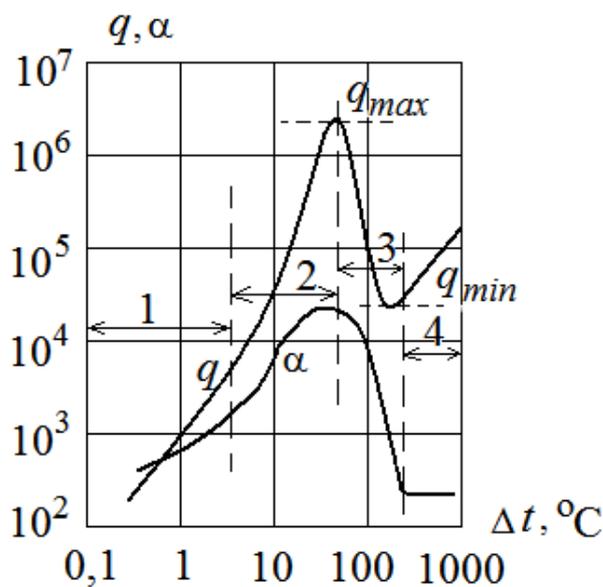


Рис. 22.1

По мере развития кипения теплоотдача начинает осуществляться именно за счет парообразования, что соответствует области развитого пузырькового кипения 2. В этой области коэффициент теплоотдачи растет гораздо быстрее, $\alpha \approx t^n$ с $n = 2$. При повышении температурного напора рост парообразования приводит к образованию возле поверхности нагрета области повышенного паросодержания; при больших тепловых

потоках наблюдается практически сплошной пристенный слой пара, при этом на поверхности сохраняется тонкая пленка перегретой жидкости. В этом режиме наблюдается максимальное значение коэффициента теплоотдачи. На пристенной границе пленки температура равна температуре стенки, а на внешней границе происходит интенсивное испарение и температура равна температуре пара. Толщина пленки для воды при атмосферном давлении составляет порядка $d \sim 10$ мкм, таким образом, характерное значение коэффициента теплоотдачи здесь $\alpha = \lambda / d \sim 10^4$ Вт/(м \cdot °C). Рост теплового потока продолжается до того, как температурный напор достигнет значения, называемо-

го первым критическим ($\Delta t = \Delta t_{\text{кр}1}$), а поток тепла, соответственно, значения $q = q_{\text{кр}1}$.

При дальнейшем повышении температурного напора на поверхности начинают образовываться так называемые «сухие пятна» – области, не смачиваемые жидкостью. Смачивание сухих пятен предотвращается интенсивным выделением пара при контакте жидкости с поверхностью, в результате которого на жидкость начинает действовать отталкивающая сила. На сухих пятнах тепловой поток на 2 порядка ниже, чем на смоченных участках, поэтому по мере того, как температурный напор увеличивается и область сухих пятен растет, средний тепловой поток снижается. Этот режим кипения носит название переходного (область 3 на [рис. 22.1](#)). Смачивание поверхности полностью исчезает при величине температурного напора, называемого вторым критическим ($\Delta t = \Delta t_{\text{кр}2}$). Отсутствие смачивания жидкостью нагретого твердого тела в результате интенсивного парообразования носит название эффекта Лейденфроста, а минимальная температура поверхности, при которой наблюдается этот эффект, называется температурой Лейденфроста. Таким образом, второй критический температурный напор равен разности температуры Лейденфроста и температуры кипения жидкости. С момента полного прекращения смачивания кипение переходит в режим пленочного (область 4 на [рис. 22.1](#)).

В пленочном режиме жидкость отделена от поверхности устойчивой пленкой пара. Перенос тепла через пленку осуществляется за счет теплопроводности и конвекции, а при больших температурных напорах – излучения. Образование и отрыв пузырьков пара в этом режиме происходит не на стенке, а на внешней границе паровой пленки. Коэффициент теплоотдачи в этом режиме зависит от температурного напора достаточно слабо, вплоть до температур порядка 1000 К, начиная с которых преобладающим становится теплообмен излучением, для которого $\alpha \sim T_{\text{ст}}^3$.

При увеличении или уменьшении температурного напора плотность теплового потока последовательно проходит в обоих направлениях все точки графика зависимости теплового потока от температурного напора (см. [рис. 22.1](#)). Таким образом, если постепенно снижать температурный напор, кипение из пленочного перейдет в режим переходного, далее – пузырькового.

Изменение структуры двухфазного потока по длине парогенерирующего канала

Труба или канал представляет собой ограниченную систему, в которой при движении кипящей жидкости происходит непрерывное увеличение паровой и уменьшение жидкой фаз. Соответственно этому изменяется и гидродинамическая структура потока как по длине, так и по поперечному сечению.

Кипение в трубах или каналах – часто встречающийся в технике процесс. Закономерности процесса кипения в трубах имеют много общего с закономерностями кипения в большом объеме. Так, в обоих случаях кипение

может проходить в пузырьковом, переходном и пленочном режиме, соответственно, при наличии смачивания, его частичном наличии и отсутствии; переходы между пузырьковым и пленочным режимами могут иметь критический характер. Однако на кипение в трубах и каналах сильно влияет вынужденное движение среды, которая является сильно неоднородной по плотности и другим теплофизическим параметрам [5].

Гидродинамическая структура двухфазного потока в зависимости от объемного паросодержания – доли объема среды, занятой паром,

$$f = \frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{п}} + V_{\text{ж}}},$$

интенсивности кипения, расходов жидкости и пара в канале, температурного напора и пространственной ориентации канала (трубы) может принимать следующий характер [5].

1. Вертикальные каналы и каналы, мало отклоняющиеся от вертикали (обычно угол отклонения ограничивают величиной 45°). При малой объемной доле пара последний присутствует в жидкости в виде пузырьков малого по сравнению с характерным размером канала диаметра. Этот режим течения носит название пузырькового. По мере увеличения объемной доли пара пузырьки начинают активно взаимодействовать, идут процессы их дробления и слияния. В случае, если конвекция не слишком интенсивна (кипение достаточно слабо и поток среды в канале невелик), слияние пузырьков преобладает над дроблением, что приводит к образованию крупных пузырей, которые могут перекрывать большую часть поперечного сечения канала. Такие пузыри под действием силы тяжести движутся вверх относительно жидкости, при этом жидкость обтекает их в направлении сверху вниз. Этот режим течения носит название снарядного, или пробкового. При интенсивном кипении или при значительном расходе среды в канале велик уровень турбулентных пульсаций скорости и давления, что приводит к интенсивному дроблению пузырьков. В таком режиме структура двухфазного потока значительно более хаотична, размеры пузырьков варьируются в широких пределах; внешне поток выглядит как пена. Этот режим течения носит название эмульсионного. При дальнейшем увеличении паросодержания, когда объемная доля жидкости становится малой, характер течения будет зависеть от того, насколько велик температурный напор, и, соответственно, от того смачивает ли жидкость стенку. При наличии смачивания реализуется дисперсно-кольцевой режим, в котором по стенке течет тонкая пленка жидкости, а остальное сечение канала занято паром, несущим дисперсную жидкую фазу (т.е. мелкие капли жидкости), образующуюся в результате разбрызгивания при кипении в пленке. Предельным случаем дисперсно-кольцевого режима является кольцевой, в котором пленка становится слишком тонкой для того, чтобы в ней происходило кипение; в этом режиме жидкость испаряется с поверхности пленки, соответственно, отсутствуют разбрызгивание и дисперсная жидкая фаза. В отсутствии смачивания реализуется дисперсный режим течения, в ко-

тором все сечение канала занято паром, несущим мелкие капли жидкости. Капли, ударяясь о стенку, не прилипают к ней, а отражаются (возможно, дробясь на более мелкие).

2. Горизонтальные каналы и каналы, наклоненные под малым углом к горизонту. Отличие этого случая от случая вертикальных каналов состоит в том, что при малой интенсивности кипения и достаточно малых расходах среды в таких каналах наблюдается расслоенный режим течения, в котором под действием силы тяжести пар сосредотачивается в верхней части канала, а жидкость – в нижней. При наличии интенсивной конвекции силы тяжести влияют на структуру течения гораздо слабее и в каналах наблюдаются те же режимы, что и в вертикальных, за исключением снарядного. Последний может реализовываться лишь в достаточно узких каналах, в которых крупные пузыри предохраняются от разрушения силами поверхностного натяжения.

В зависимости от температурного напора кипение на стенке может быть пузырьковым, переходным или пленочным во всех режимах течения, за исключением дисперсно-кольцевого и дисперсного режима. Как уже отмечалось, в дисперсно-кольцевом режиме должно присутствовать смачивание жидкостью стенки, что соответствует случаю пузырькового или переходного режима кипения. Дисперсный режим не имеет аналогии среди процессов кипения в большом объеме жидкости. В этом режиме осуществляется конвективная теплоотдача от стенки к перегретому пару, а от пара, в свою очередь – к каплям жидкости, имеющим температуру кипения и испаряющимся с поверхности по мере получения тепла.

Рассмотрим процесс перехода среды из состояния чистой жидкости в состояние чистого пара в обогреваемом канале. В случае вертикальной или наклонной трубы будем считать, что жидкость подается снизу. Характер процесса представлен на рис. 22.2 для двух типичных случаев – большого (рис. 22.2, а) и малого (рис. 22.2, б) расходов в канале. Пусть начальная температура жидкости ниже температуры кипения, при этом температура стенки канала не слишком велика, следовательно, жидкость смачивает стенку. Тогда на первом участке канала будет происходить нагрев жидкости, описываемый законами конвективного теплообмена в однофазной среде (рис. 22.2, а, б, участок 1).

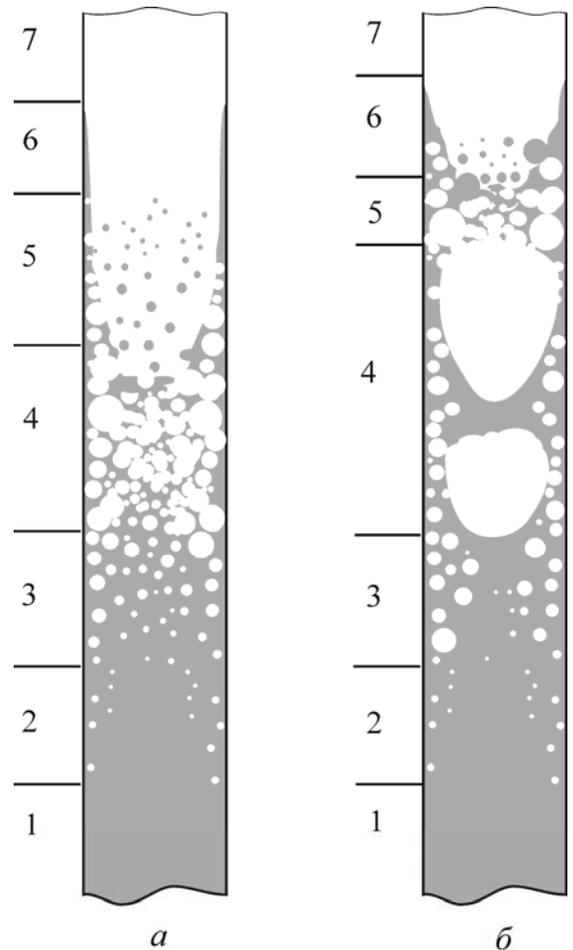


Рис. 22.2

На втором участке канала начинается кипение жидкости. Пристенные слои жидкости первыми достигнут температуры кипения, при этом температура в серединной части канала будет ниже. В результате начавшееся кипение будет происходить в недогретой жидкости. Пузырьки пара, образующиеся на стенке, будут конденсироваться, попадая в недогретую жидкость (рис. 22.2, а, б, участок 2). На завершающей стадии конденсации пузырька наблюдается его быстрое схлопывание под действием сил поверхностного натяжения, в результате чего происходит испускание звуковой волны. Поэтому конденсация большого количества пузырьков сопровождается характерным шумом, более интенсивным, чем шум, испускаемый при кипении жидкости.

К концу второго участка канала жидкость достигает температуры кипения и на третьем участке происходит пузырьковое кипение жидкости (рис. 22.2, а, б, участок 3). С увеличением высоты растет паросодержание, и при интенсивной конвекции течение переходит от пузырькового к эмульсионному режиму напрямую (рис. 22.2, а, участок 4), а при слабой конвекции эмульсионному режиму (рис. 22.2, б, участок 5) предшествует снарядный (рис. 22.2 б, участок 4). При дальнейшем повышении паросодержания поток переходит в дисперсно-кольцевой (рис. 22.2, а, участок 5) и кольцевой режим (рис. 22.2, а, б, участок 6), после чего испарение завершается. На следующем участке (рис. 22.2, а, б, участок 7) среда состоит из единственной фазы – пара, в начале участка – насыщенного, далее – перегретого.

В ряде случаев (например, в некоторых типах парогенераторов) кипение в каналах происходит при большом температурном напоре, т.е. при отсутствии смачивания жидкостью стенки. В таких случаях режим течения будет последовательно проходить стадии пузырькового, эмульсионного (которому может предшествовать снарядный) и дисперсного.

При движении двухфазного потока внутри горизонтально расположенных труб или труб с небольшим наклоном (рис. 22.3), кроме изменения структуры потока по длине, имеет место значительное изменение по периметру трубы.

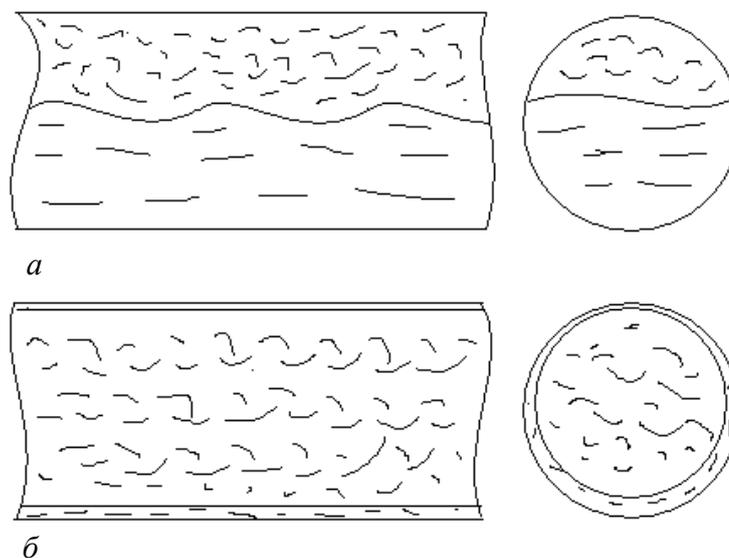


Рис. 22.3

Так, если скорость циркуляции и содержание в потоке невелики, наблюдается расслоение двухфазного потока на жидкую фазу, движущуюся в нижней части трубы, и паровую, движущуюся в верхней части трубы (рис. 22.3, а). При дальнейшем увеличении паросодержания и скорости циркуляции поверхность раздела между паровой и жидкой фазами приобретает волновой характер, и жидкость гребнями волн периодически смачивает верхнюю часть трубы. С дальнейшим увеличением содержания пара и скорости волновое движение на границах раздела фаз усиливается, что приводит к частичному выбрасыванию жидкости в паровую область. В результате двухфазный поток приобретает режим, сперва близкий к пробковому, а потом к кольцевому (рис. 22.3, б). При кольцевом режиме по всему периметру трубы устанавливается движение тонкого слоя жидкости, внутри трубы перемещается парожидкостная эмульсия. Однако и в этом случае полной осевой симметрии не наблюдается.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение процесса кипения жидкости. Поясните термодинамические условия, при которых возможно кипение.
2. Дайте определение и поясните особенности пузырькового и пленочного режимов кипения жидкости.
3. Охарактеризуйте механизм пузырькового и пленочного режимов кипения жидкости, а также их влияние на процесс теплоотдачи.
4. Какая жидкость называется перегретой, какие процессы могут вызвать значительный перегрев жидкости?
5. Какие условия необходимы для кипения жидкости, кроме ее перегрева?
6. В каком случае и почему выше теплоотдача – при конвективном теплообмене или при пузырьковом кипении жидкости?
7. Почему при пленочном режиме кипения коэффициент теплоотдачи не зависит от температурного напора?
8. Чем опасен пленочный режим кипения жидкости?
9. Какие факторы влияют на структуру течения двухфазной среды в трубах и каналах?
11. Какие режимы течения наблюдаются при кипении жидкости в вертикальных и горизонтальных трубах?
12. Какие режимы течения реализуются в процессе перехода среды из жидкого состояния в парообразное в обогреваемых каналах? От каких факторов зависит порядок смены режимов течения?

Лекция 23.

Определение коэффициентов теплоотдачи при кипении однокомпонентных жидкостей

Механизм теплообмена и расчетные соотношения для теплоотдачи при пузырьковом кипении жидкостей. Теплообмен при пленочном кипении жидкостей.

Механизм теплообмена и расчетные соотношения для теплоотдачи при пузырьковом кипении жидкостей

Кипение – сложное явление, включающее в себя следующие параллельно протекающие процессы: передачу тепла от стенки к жидкости напрямую или при пленочном кипении через слой пара; образование и рост в перегретой жидкости паровых пузырьков; отделение от поверхности нагрева и всплытие пузырьков. Протекание перечисленных процессов определяется следующими факторами: теплопроводностью и вязкостью жидкости, динамическим напором потока пара, поверхностным натяжением, силой тяжести. В связи с этим коэффициент теплоотдачи при кипении должен определяться следующим набором теплофизических параметров: плотность жидкой и паровой фазы, удельная теплота парообразования, коэффициент теплопроводности жидкости (при пленочном кипении) и пара (при пленочном кипении), коэффициент вязкости жидкости, ускорение свободного падения. В результате анализа уравнений динамики двухфазной среды методами теории размерностей и обработки опытных данных Д. А. Лабунцовым было получено соотношение для определения коэффициента теплоотдачи при пузырьковом кипении неподвижной жидкости в большом объеме [5]:

$$\alpha = b(\rho'/\rho'')\lambda^{2/3}(\sigma\nu T_n)^{-1/3}q^{2/3}, \quad (23.1)$$

где ν , λ , σ – кинематический коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности, коэффициент поверхностного натяжения жидкости при температуре насыщения; ρ' и ρ'' – плотности жидкости и пара при температуре насыщения; T_n – температура насыщения. Для функции $b(\rho'/\rho'')$, на основании опытных данных выведено эмпирическое выражение

$$b(\rho'/\rho'') = 0,075(1 + 10(\rho'/\rho'' - 1)^{-2/3}). \quad (23.2)$$

Выражения (23.1, 23.2) проверены для многих жидкостей в широком диапазоне условий. В частном случае, для воды, из (23.1, 23.2) может быть получено следующее расчетное соотношение:

$$\alpha = \frac{3,4 \cdot p^{0.18}}{1 - 0,0045 \cdot p} \cdot q^{2/3},$$

в котором давление выражено в барах, остальные величины – в единицах СИ.

При вынужденном движении кипящей жидкости в трубах в условиях, когда жидкость нагрета до температуры насыщения, коэффициент теплоотдачи α может быть подсчитан по следующим формулам [18]:

$$\alpha = \alpha_w \quad \text{при } \alpha_k / \alpha_w < 0,5; \quad (23.3)$$

$$\alpha = \alpha_k \quad \text{при } \alpha_k / \alpha_w > 2; \quad (23.4)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_w} = \left(1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_w} \right)^{1/2}, \quad \text{при } 0,5 \leq \frac{\alpha_k}{\alpha_w} \leq 2,$$

где α_k – коэффициент теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении в большом объеме, определяемый по формулам (23.3) и (23.4); α_w – коэффициент теплоотдачи при турбулентном движении однофазной жидкости в трубах.

Теплообмен при пленочном кипении жидкостей

Пленочное кипение наблюдается при закалке металлов в жидкой среде, в ряде быстродействующих перегонных аппаратов, при кипении криогенных жидкостей. Пленочный режим кипения имеет место при охлаждении жидкостью ракетных двигателей на химическом топливе и атомных ракетных двигателей. При высоких давлениях абсолютная величина коэффициента теплоотдачи при пленочном кипении становится значительной, поэтому пережога котельной трубы не происходит, хотя температурный напор между стенкой и жидкостью заметно повышается. Это делает допустимым использование процессов теплообмена с пленочным кипением также в некоторых парогенерирующих устройствах.

На теплоотдачу при пленочном кипении влияют давление, физические свойства жидкости, а также лучистый теплообмен между поверхностью теп-

лообмена и жидкостью через паровую пленку. Обе формы переноса тепла – теплопроводностью и излучением – не являются независимыми друг от друга. Взаимное влияние обоих процессов проявляется в том, что пар, образующийся благодаря излучению, приводит к утолщению паровой пленки и соответствующему уменьшению интенсивности переноса тепла за счет теплопроводности.

При пленочном кипении насыщенной жидкости тепловой поток, отводимый от поверхности нагрева, расходуется не только на испарение слоев жидкости, расположенных на границе паровой пленки. Часть отводимого тепла идет также на перегрев пара в пленке, так как средняя температура пара внутри пленки всегда выше, чем температура насыщения.

Теплоотдача при ламинарном движении паровой пленки. Расчетные данные можно получить теоретическим путем. Используется модель, аналогичная пленочной конденсации (рис. 23.1).

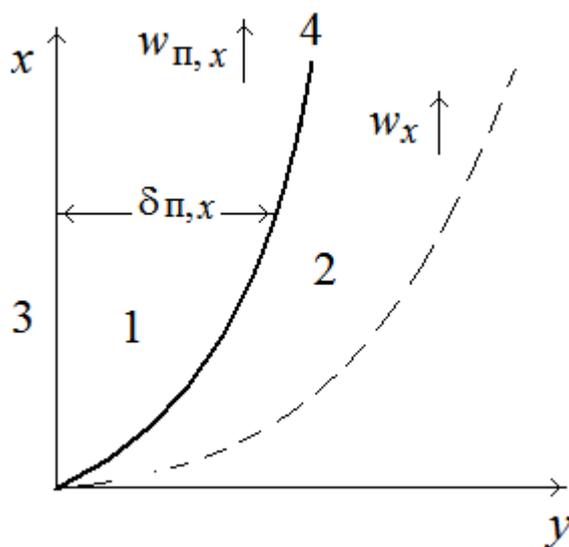


Рис. 23.1

Предположим, что сплошная пленка перегретого пара (1) ламинарно движется под действием подъемной силы вверх по обогреваемой вертикальной стенке, имеющей температуру t_c (3). Вдали от стенки неподвижная жидкость имеет температуру t_n (2). Предположения такие же, как в случае пленочной конденсации, и уравнения тоже.

Краевые условия следующие: на границе раздела фаз (4) $t = t_n$. Для скорости может быть два типа условий – первый: $w_{гр} = 0$ для неподвижной жидкости вдали от стенки; второй – $(\partial w / \partial y)_{гр} = 0$ для жидкости и пара, движущихся на границе с одинаковой скоростью.

Решение имеет вид [5, 18]

$$\alpha = C \sqrt[4]{\frac{\lambda_{п}^3 r \rho_{п} (\rho - \rho_{п}) g}{\mu_{п} \Delta t H}},$$

где $C = 0,677$ для первого типа условий и $C = 0,943$ для второго.

Средний коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности горизонтального цилиндра выражается зависимостью [18]

$$\alpha = C_1 \sqrt[4]{\frac{\lambda_{\text{п}}^3 r \rho_{\text{п}} (\rho - \rho_{\text{п}}) g}{\mu_{\text{п}} \Delta t d}},$$

где $C_1 = 0,53$ для первого типа условий и $C_1 = 0,72$ для второго. Во всех формулах все параметры, кроме плотности ρ относятся к пару.

Теплоотдача при турбулентном движении паровой пленки. При вертикальном расположении стенки более вероятным является турбулентный, а не ламинарный характер движения пленки. Для этого случая не существует пока строгой теории. В основу приближенных теорий положены модели, применяемые при исследовании теплоотдачи при конвекции однофазной жидкости. Характер распределения скорости и температуры в пограничном слое при кипении является сходным с соответствующими профилями в пограничном слое при свободной конвекции однофазной жидкости. Поэтому теплоотдачу при пленочном кипении можно представить формой зависимости, которая применяется при конвекции однофазной жидкости [5, 18]:

$$\text{Nu}_T = C (\text{Ra})_T^{1/3}.$$

Применительно к пленочному кипению подъемная сила $g \beta \rho \Delta t$, входящая в критерий Релея, заменяется силой, определяющей движение пара в пленке, равной $g (\rho - \rho_{\text{п}})$; постоянная $C = 0,25$. Физические свойства относятся к средней температуре паровой пленки. Область применимости: $\text{Ra}_T \geq 2 \cdot 10^7$.

Контрольные вопросы

1. Запишите критериальные уравнения для определения теплоотдачи при пузырьковом режиме кипения неподвижной жидкости.
2. Поясните особенности определения теплоотдачи в случае вынужденного движения кипящей жидкости в трубах.
3. В каких случаях коэффициент теплоотдачи при пленочном режиме кипения жидкости является достаточным, чтобы отводить требуемое количество теплоты?
4. В каких областях техники используется пленочный режим кипения жидкости?
5. Как определяется коэффициент теплоотдачи при ламинарном движении паровой пленки вдоль вертикальной стенки и на горизонтальной трубе?
6. Как определяется коэффициент теплоотдачи при турбулентном движении паровой пленки?

Лекция 24. Кризисы кипения

Кризис пузырькового кипения жидкостей в свободном объеме. Температура предельного перегрева жидкости, минимальная плотность теплового потока при пленочном кипении. Особенности теплообмена при кипении в трубах. Переходное кипение.

Кризис пузырькового кипения жидкостей в свободном объеме. Температура предельного перегрева жидкости, минимальная плотность теплового потока при пленочном кипении

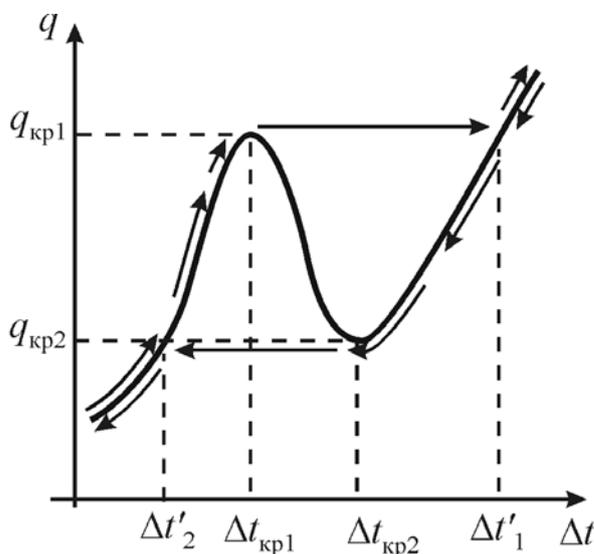


Рис. 24.1

Во многих теплообменных устройствах современной энергетики и ракетной техники поток тепла, который должен отводиться от поверхности нагрева, является фиксированным и часто практически не зависит от температурного режима теплоотдающей поверхности.

Теплоотвод к внешней поверхности экранных труб, расположенных в топке котельного агрегата, определяется в основном за счет излучения из топочного пространства, падающий лучистый поток практически не зависит от температуры поверхности труб, пока она

существенно ниже температуры раскаленных продуктов сгорания в топке. Аналогичное положение имеет место в каналах ракетных двигателей. Внутри ТВЭЛов активной зоны атомного реактора происходит непрерывное выделение тепла ядерной реакции. Такое же положение имеет место в случае выделения тепла внутри металлических стержней или иных поверхностей при протекании электрического тока [5].

Если отвод тепла от поверхности нагрева осуществляется в процессе кипения охлаждающей жидкости, то следует считать, что тепловая нагрузка на поверхности кипения является заданной и не зависит от режима кипения.

В этой ситуации наблюдается картина перехода между режимами кипения, отличная от наблюдаемой при изменении заданного температурного напора. При увеличении теплового потока температура будет непрерывно увеличиваться, пока поток не достигнет величины $q_{кр1}$ (рис. 24.1). При превышении потоком величины $q_{кр1}$ стационарное кипение становится невоз-

возможным, так как кривая зависимости стационарного потока тепла от температуры идет вниз. Поскольку поток тепла задан и не может снизиться, температура поверхности начинает повышаться, что снова приводит к снижению потока теплоотдачи.

Температура поверхности продолжает расти до тех пор, пока на ней не установится стационарный тепловой поток. Это произойдет уже на участке кривой кипения, соответствующем пленочному режиму, при температурном напоре $\Delta t = \Delta t'_1$. Итак, при незначительном превышении тепловым потоком величины $q_{кр1}$ произойдет резкий рост температурного напора от $\Delta t = \Delta t_{кр1}$ до $\Delta t = \Delta t'_1$, сопровождаемый переходом от пузырькового режима кипения к пленочному. Это явление называется первым кризисом кипения. Подчеркнем, что переход от пузырькового режима к пленочному при фиксированном тепловом потоке является нестационарным процессом, сопровождаемым появлением и ростом сухих пятен на поверхности кипения. Промежуточные состояния не могут наблюдаться в стационарном режиме.

При снижении теплового потока будет наблюдаться иная картина. Пленочный режим кипения будет наблюдаться до тех пор, пока зависимость теплового потока от температурного напора не достигнет минимума (точка $\Delta t = \Delta t_{кр2}$, $q = q_{кр2}$ на [рис. 24.1](#)). При дальнейшем снижении теплового потока произойдет второй кризис кипения, наблюдаемый как скачкообразное снижение температурного напора. Во многом второй кризис развивается как процесс, обратный первому: он начинается с появления участков смачивания поверхности жидкостью, в результате чего возрастает коэффициент теплоотдачи, температура поверхности снижается и т. д. вплоть до достижения точки $\Delta t = \Delta t'_2$.

Как можно видеть, при изменении заданного теплового потока в положительную и отрицательную сторону температурный напор изменяется по разным законам. Это явление называется тепловым гистерезисом. В диапазоне потоков тепла $q_{кр2} < q < q_{кр1}$ прямая $q = \text{const}$ пересекает кривую кипения трижды – в области пузырькового, переходного и пленочного кипения. Значение температурного напора, соответствующее переходному режиму, не реализуется при заданном тепловом потоке, так как является неустойчивым: при случайном повышении температуры теплоотдача ухудшится и температура продолжит расти, и наоборот. Поэтому при заданном потоке тепла $q_{кр2} < q < q_{кр1}$ температурный напор может принимать одно из двух значений, соответствующих пузырьковому или пленочному режиму кипения, в зависимости от того, каким образом достигнуто текущее состояние: путем повышения теплового потока от низких значений, соответствующих конвективной теплоотдаче или слабому кипению, или путем снижения теплового потока от высоких значений, соответствующих пленочному кипению.

Знание величин критической нагрузки чрезвычайно важно для правильного проектирования современных форсированных теплообменных устройств и безаварийной эксплуатации их. Величины критических тепловых

потоков определяют опытным путем. Опыты показывают, что для условий кипения насыщенной жидкости в большом объеме значения критических нагрузок зависят от рода кипящей жидкости, давления, состояния поверхности и условий ее смачивания, наличия в жидкости примесей и поверхностно-активных добавок. Определенное влияние оказывает также действие силы тяжести. Температурный напор в момент достижения критической тепловой нагрузки называют критическим температурным напором $\Delta t_{кр1} = t_{с.кр} - t_n$. Коэффициент теплоотдачи в момент начала кризиса кипения

$$\alpha_{кр1} = q_{кр1} / \Delta t_{кр1}.$$

Критическая тепловая нагрузка при кипении жидкости в большом объеме может быть подсчитана по формуле Кутателадзе [5]:

$$q_{кр1} = 0,14 \cdot r \cdot \sqrt{\rho''} \cdot \sqrt[4]{\sigma g (\rho' - \rho'')},$$

где r – теплота парообразования; остальные обозначения, как в формулах (24.1) и (24.2).

Характерные значения критической плотности теплового потока и температурного напора для воды и некоторых криогенных жидкостей при атмосферном давлении приведены в [табл. 24.1](#).

Таблица 24.1

Жидкость	H ₂ O	O ₂	N ₂	H ₂
$q_{кр1} \cdot 10^{-3}, \text{Вт/м}^2$	1200	150	100	30
$\Delta t_{кр1}, \text{°C}$	25 – 30	11	11	2

Величина $q_{кр2}$ при кипении насыщенной жидкости в большом объеме существенно меньше, чем $q_{кр1}$. Опыты показывают, что вторые критические нагрузки зависят от рода жидкости, размеров теплоотдающей поверхности, давления, силы тяжести, шероховатости поверхности и ряда иных факторов, при этом второй критический температурный напор связан с температурой предельного перегрева жидкости соотношением

$$\Delta t_{кр2} \approx 0,9(t_{п.п} - t_s).$$

Температура предельного перегрева жидкости может быть приближенно определена из следующего соотношения:

$$T_{п.п} / T_{кр} = 0,905 + 0,095 \left(T_s / T_{кр} \right)^8,$$

где $T_{кр}$ – критическая температура для данного вещества.

Для воды при атмосферном давлении $q_{кр2}$ на поверхности горизонтальных труб и цилиндров составляет $2 - 5 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$. В зависимости от диаметра труб d величины $q_{кр2}$ изменяются $q_{кр2} \approx d^{-1/4}$. Для других жидкостей экспериментально измеренные значения $q_{кр2}$ и $\Delta t_{кр2}$ приведены в [табл. 24.2](#).

Таблица 24.2

Жидкость	Четыреххлористый углерод	Н-пентан	Изопропиловый спирт	Жидкий азот
$q_{кр2} \cdot 10^{-4}, \text{ Вт/м}^2$	1,3	1,0	3,5	0,6
$\Delta t_{кр2}, \text{ }^\circ\text{C}$	80	60	110	30

Особенности теплообмена при кипении в трубах Переходное кипение

При кипении насыщенной жидкости в большом объеме на поверхности горизонтальных труб в условиях электрообогрева существует такая (средняя по поверхности нагрева) тепловая нагрузка, при которой могут устойчиво сосуществовать пленочный режим кипения на одной части поверхности и пузырьковый на другой ее части [18]. Эта тепловая нагрузка называется равновесной. Если после установления равновесной нагрузки несколько увеличить поток тепла, то граница раздела режимов кипения начнет перемещаться в область пузырькового режима и через некоторое время на всей поверхности установится пленочный режим. Если уменьшить нагрузку, то наоборот. Равновесная тепловая нагрузка $q_{равн} = 0,2 q_{кр1}$, при этом $q_{кр2} < q_{равн} < q_{кр1}$. Знание равновесных потоков тепла представляет интерес для анализа устойчивости режимов кипения.

Контрольные вопросы

1. Какие явления называют первым и вторым кризисами кипения?
2. Что называют первой и второй критической плотностью теплового потока?
3. Запишите критериальное уравнение и поясните особенности вычисления первой критической тепловой нагрузки.
4. Приведите характерные значения первой критической тепловой нагрузки и температурных напоров.
5. Как соотносятся между собой для одного и того же вещества первая и вторая критические тепловые нагрузки?
6. В чем состоит явление теплового гистерезиса при кипении?
7. Приведите характерные значения второй критической тепловой нагрузки и температурных напоров.
8. Что называют равновесной тепловой нагрузкой? Какова ее величина? В каком случае реализуется данный режим кипения жидкости?

МОДУЛЬ 4. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Лекция 25. Основные положения теплообмена излучением

Описание процесса лучистого теплообмена. Виды лучистых потоков. Спектральная плотность потока излучения. Интегральная плотность потока излучения. Собственное, отраженное, поглощенное, пропущенное, эффективное, результирующее излучение. Понятие абсолютно черного тела. Излучательные характеристики абсолютно черного тела.

Описание процесса лучистого теплообмена

Процессы лучистого теплообмена получили широкое распространение в различных областях техники, в частности в теплотехнике, ядерной энергетике, ракетной технике, металлургии, сушильной технике, химической технологии, светотехнике и др [8, 19, 21].

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения внутренней энергии излучающего тела путем электромагнитных волн. Электромагнитными волнами называют электромагнитные возмущения, исходящие от излучающего тела и распространяющиеся в вакууме со скоростью света, равной $3 \cdot 10^8$ м/с. При поглощении электромагнитных волн какими-либо другими телами они вновь превращаются в тепловую энергию. Возбудителями электромагнитных волн являются заряженные материальные частицы, т.е. электроны и ионы, входящие в состав вещества. При этом колебания ионов соответствуют излучению низкой частоты; излучение, обусловленное движением электронов может, иметь высокую частоту, если они входят в состав атомов и молекул и удерживаются около положения своего равновесия значительными силами.

В металлах многие электроны являются свободными. Поэтому здесь нельзя говорить о колебаниях около центров равновесия. Электроны движутся и при этом испытывают нерегулярное торможение. Вследствие этого излучение металлов приобретает характер импульсов и имеет волны различной частоты и том числе волны низкой частоты. Помимо волновых свойств, излучение обладает также и корпускулярными свойствами, которые состоят в том, что лучистая энергия испускается и поглощается материальными телами не непрерывно, а отдельными дискретными порциями – квантами света или

фотонами. Испускаемый фотон – частица материи, обладающая энергией, количеством движения и электромагнитной массой. Поэтому тепловое излучение можно рассматривать как фотонный газ. Прохождение фотонов через вещество есть процесс поглощения и последующего испускания энергии фотонов атомами и молекулами этого вещества.

Таким образом, излучение имеет двойственный характер, поскольку оно обладает свойствами непрерывного поля электромагнитных волн и свойствами дискретности, типичными для фотонов. Синтезом обоих свойств является представление, согласно которому энергия и импульс сосредоточиваются в фотонах, а вероятность нахождения их в том или ином месте пространства – в волнах. Все виды электромагнитного излучения имеют одинаковую природу и различаются лишь длиной волн ([табл. 25.1](#)).

Таблица 25.1

Вид излучения	Космическое	Гамма-излучение	Рентгеновское	Ультрафиолетовое	Видимое	Тепловое (инфракрасное)	Радиоволны
Длина волн, м	$5 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-13}$ – 10^{-10}	10^{-12} – $2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$ – $4 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$ – $8 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7}$ – $8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$ – 10^4

Тепловому излучению соответствуют частоты примерно от $3 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^5$ ГГц или длины волн от 0,8 мкм до 0,8 мм. Для данного диапазона характерно проявление как квантовых, так и волновых свойств, которые проявляются по-разному в зависимости от длины волн. Квантовые (корпускулярные) свойства проявляются наиболее существенно в коротковолновом излучении. Наоборот, характерные волновые свойства наиболее отчетливо наблюдаются у радиоволн.

Большинство твердых и жидких тел имеет сплошной спектр излучения, т. е. излучает энергию всех длин волн от нуля до бесконечности. К числу твердых тел, имеющих сплошной спектр излучения, относятся диэлектрики, полупроводники и окислы металлов. Некоторые тела излучают энергию только в определенных интервалах длин волн, т.е. испускают энергию прерывистым спектром. К ним относятся чистые металлы и газы, которые характеризуются селективным или выборочным излучением. Излучение различных тел различно. Оно зависит от природы тела, его температуры, состояния поверхности, а для газов – еще и от толщины слоя и давления. Большинство встречающихся в природе и технике тел имеют значительную поглощательную и излучательную способность, поэтому в процессах лучистого теплообмена участвуют лишь тонкие поверхностные слои. Для проводников тепла толщина этих слоев имеет порядок 1 мкм, а для непроводников тепла – 1 мм. Поэтому применительно к твердым телам, а также к жидкостям тепловое излучение в ряде случаев приближенно можно рассматривать как поверхностное явление. Газообразные тела имеют значительно меньшее излучение, чем

жидкие и твердые тела. Поэтому в излучении газов участвуют все его частицы, и процесс теплового излучения носит объемный характер.

Излучение всех тел зависит от температуры. С увеличением температуры излучение увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. Изменение температуры тела вызывает не только изменение абсолютной величины интенсивности излучения, но сопровождается еще изменением спектрального состава или «цвета» излучения. С повышением температуры повышается интенсивность коротковолнового излучения и уменьшается интенсивность длинноволновой части спектра. Зависимость излучения от температуры значительно большая, чем процессов теплопроводности и конвекции. Поэтому при низких температурах преобладающую роль может играть теплообмен за счет конвекции и теплопроводности, а при высоких – основным видом переноса тепла может быть тепловое излучение.

Равновесное излучение создается источником при постоянной его температуре. Например, тело находится внутри оболочки с непрозрачными стенками, температура которых равна температуре тела. Неравновесное излучение происходит, когда источник излучения нагревают. Например, в лампах накаливания в энергию электромагнитных волн преобразуется часть тепла, выделяющаяся при протекании электрического тока.

Виды лучистых потоков. Спектральная плотность потока излучения. Интегральная плотность потока излучения

Q – интегральный или полный лучистый поток – суммарное излучение с поверхности твердого тела в единицу времени по всем направлениям полусферического пространства и по всем длинам волн.

Q_λ – поток монохроматического, спектрального или однородного излучения – излучение с поверхности твердого тела в единицу времени, относящееся к узкому интервалу изменений длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$.

$E = \frac{dQ}{dF}$ – интегральная плотность полусферического излучения или

излучательная способность тела – интегральный лучистый поток, испускаемый с единицы поверхности тела по всем направлениям полусферического пространства. Лучистый поток по всей поверхности можно выразить как $Q = \int_F E dF$. Если $E = \text{const}$, то $Q = E \cdot F$. Здесь F – полная поверхность тела.

$J_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}$ – спектральная интенсивность излучения – отношение плотности лучистого потока, испускаемого в бесконечно малом интервале длин волн, к величине этого интервала длин волн. В этом случае имеет место излучение энергии одного цвета с единицы поверхности по всем направлениям

полусферического пространства, т. е. интенсивность излучения изменяется с длиной волны.

Угловая интенсивность или яркость излучения – количество энергии, испускаемое в определенном направлении единицей площадки, расположенной перпендикулярно направлению излучения, отнесенное к единице элементарного телесного угла: спектральная $B_\lambda = \frac{dJ_\lambda}{d\omega}$ или интегральная $B = \frac{dE}{d\omega}$.

Величина яркости, как и интенсивности излучения, в общем случае может изменяться в зависимости от места расположения элементарной излучающей площадки, а также по различным направлениям излучения.

Для направленного излучения плотности лучистых потоков должны быть отнесены к проекции элементарной площадки на плоскость, ортогональную к направлению излучения (рис. 25.1), и тогда для направленного излучения указанные зависимости примут следующий вид (ψ – угол, составленный нормалью к площадке и направлением излучения): для спектрально-

$$\text{го} \quad - \quad B_{\lambda,\psi} = \frac{dJ_{\lambda,\psi}}{d\omega} = \frac{dJ_\lambda}{d\omega} \cdot \cos \psi, \quad \text{для интегрального} \quad - \quad B_\psi = \frac{dE_\psi}{d\omega} = \frac{dE}{d\omega} \cdot \cos \psi.$$

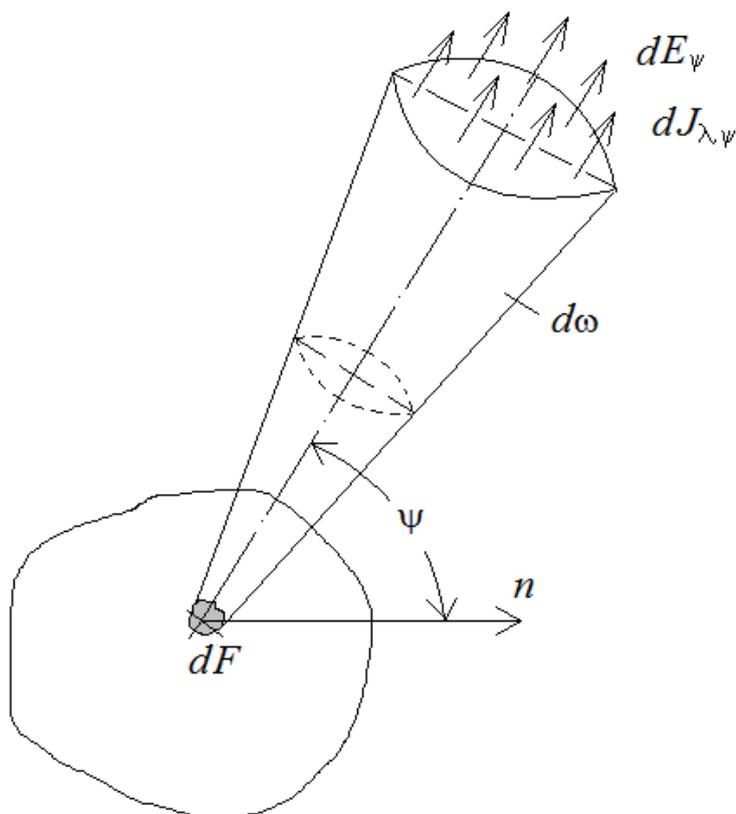


Рис. 25.1

Собственное, отраженное, поглощенное, пропущенное, эффективное, результирующее излучение. Понятие абсолютно черного тела. Излучательные характеристики абсолютно черного тела

Рассмотрим разновидности полусферического излучения.

Собственное излучение (Q , E) определяется природой данного тела и его температурой. Обычно тело участвует в теплообмене с другими телами, энергия излучения которых, попадая на данное тело, частично им поглощается, частично отражается, а часть ее проходит сквозь тело.

Падающее излучение ($Q_{\text{пад}}$ или $E_{\text{пад}}$) – количество лучистой энергии, падающее на данное тело.

Поглощенная энергия – часть падающей энергии излучения, поглощенная данным телом и преобразованная им во внутреннюю энергию: $Q_{\text{погл}} = A Q_{\text{пад}}$ или $E_{\text{погл}} = A E_{\text{пад}}$, где A – коэффициент поглощения. Тела, которые поглощают всю падающую на них энергию теплового излучения (в том числе и видимый свет), называются абсолютно черными ($A = 1$, см. [рис. 25.2](#) (1)). В то же время, если поверхность поглощает все лучи, кроме световых, она не кажется черной, хотя по лучистым свойствам близка к абсолютно черному телу из-за высокой поглощательной способности, например, лед и снег, для которых $A = 0,95-0,98$. Аналогично определяется коэффициент поглощения A_λ для монохроматического излучения, который в общем случае может зависеть от длины волны (3). Тела, для которых коэффициент монохроматического поглощения не зависит от длины волны, называются серыми телами (2). Они поглощают не всю падающую на них лучистую энергию.

Часть падающей энергии, которую тело отражает обратно окружающим его телам, носит название отраженного излучения: $Q_{\text{отр}} = R Q_{\text{пад}}$ или $E_{\text{отр}} = R E_{\text{пад}}$, где R – коэффициент отражения. Если $R = 1$ и процессы отражения подчиняются законам геометрической оптики, то поверхность называется зеркальной; при диффузном отражении (т.е. энергия испускается телом равномерно во всех направлениях) поверхность называют абсолютно белой.

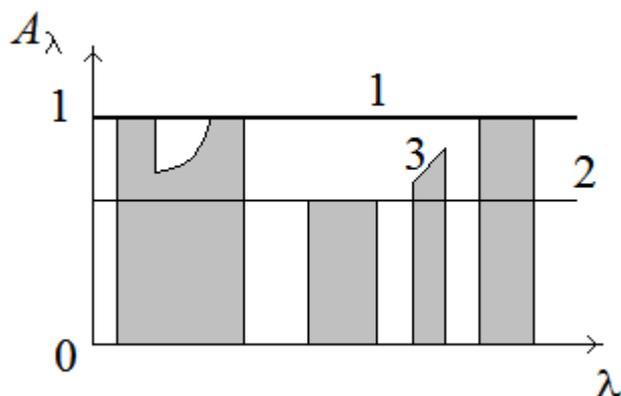


Рис. 25.2

Часть падающей энергии излучения, проходящая сквозь тело, называется пропускательным излучением: $Q_{\text{проп}} = D Q_{\text{пад}}$ или $E_{\text{проп}} = D E_{\text{пад}}$, где D – коэффициент пропускания. Тела, у которых $D = 1$, называются прозрачными, прозрачными или диатермичными телами (тонкие слои сухого воздуха, одноатомных газов). Для твердых и жидких тел принимается $D = 0$, так как они поглощают лучистую энергию в тонком поверхностном слое.

Лучистый теплообмен – это совокупные процессы взаимного испускания, поглощения, отражения и пропускания энергии излучения в системах различных тел, причем эти тела могут иметь одинаковую температуру. Для тела, участвующего в лучистом теплообмене с другими телами, согласно закону сохранения энергии можно составить следующие уравнения теплового баланса: $Q_{\text{пад}} = Q_{\text{погл}} + Q_{\text{отр}} + Q_{\text{проп}}$; $E_{\text{пад}} = E_{\text{погл}} + E_{\text{отр}} + E_{\text{проп}}$ или $A + R + D = 1$.

Эффективное излучение – сумма собственного излучения и отраженного излучения, испускаемого поверхностью данного тела, лучистый поток которого выражается зависимостями $Q_{\text{эф}} = Q + R Q_{\text{пад}}$, $E_{\text{эф}} = E + R E_{\text{пад}}$. Эффективное излучение зависит не только от физических свойств и температуры данного тела, но и от физических свойств и температуры окружающих его тел, от формы, размеров и относительного расположения тел в пространстве, поэтому физические свойства эффективного и собственного излучений различны. Различными оказываются и спектры их излучения.

Результирующее излучение представляет собой разность между лучистым потоком, получаемым данным телом, и лучистым потоком, испускаемым в окружающее его пространство. Результирующее излучение может быть определено двумя способами: $q_{\text{рез}} = E - E_{\text{погл}} = E - A E_{\text{пад}}$ или $q_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}$. Тогда эффективное излучение может быть определено как

$$E_{\text{эф}} = \frac{1}{A} [E - (1 - A)q_{\text{рез}}].$$

Из изложенного следует: все виды полусферического излучения, кроме собственного, являются линейными функциями падающего излучения. Собственное излучение объединяется и увязывается с другими видами излучения через эффективное излучение.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение теплового излучения, поясните его механизм.
2. Какие виды излучения вы знаете? Какие длины волн им соответствуют?
3. Какое излучение называется селективным или выборочным? В каком случае излучение имеет сплошной спектр?
4. Что называют объемным и поверхностным излучением? Излучение каких групп веществ носит объемный или поверхностный характер?
5. Излучение каких групп веществ имеет сплошной или селективный спектр и почему?
6. Какое излучение называют равновесным или неравновесным?

7. Дайте определение, запишите обозначение и единицы измерения следующих видов лучистых потоков: интегральный поток излучения, спектральный поток излучения, излучательная способность тела, спектральная интенсивность излучения, спектральная яркость излучения, интегральная яркость излучения.

8. Перечислите разновидности полусферического излучения, дайте их определение и запишите выражения для их вычисления.

9. Какие тела называют абсолютно черными? Серыми?

10. В каком случае поверхность называется зеркальной? Абсолютно белой?

11. Какие среды называют диатермичными?

12. Дайте определение коэффициентов поглощения, отражения и пропускания. Запишите соотношение между ними.

13. Что называют лучистым теплообменом?

Лекция 26.

Законы теплового излучения

Закон Планка. Правило смещения Вина. Закон Стефана-Больцмана. Закон Кирхгофа. Закон Ламберта. Угловые коэффициенты излучения.

В силу общей природы электромагнитных волн основные законы, которым подчиняется излучение, являются для них общими. Эти законы получены применительно к идеальному телу, которым является абсолютно черное тело, и равновесному излучению, при котором все тела, входящие в данную излучающую систему, имеют одинаковую температуру [18, 21].

Закон Планка. Правило смещения Вина

Используя статистические методы и гипотезу о квантовом характере теплового излучения, Планк вывел формулу для спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела

$$J_{\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right)^{-1}. \quad (26.1)$$

Здесь $c_1 = 0,374 \cdot 10^{-15}$ Вт·м² – первая постоянная Планка; $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ м·К – вторая постоянная Планка; λ – длина волны, м; T – абсолютная температура, К.

Рассмотрим некоторые предельные случаи закона Планка.

Если энергия кванта очень мала по сравнению с энергией теплового движения, то есть $h\nu \ll kT$, или $\lambda T \gg c_2$, то при этом имеем

$$\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) \approx 1 + \frac{c_2}{\lambda T},$$

и тогда закон Планка переходит в закон Релея – Джинса:

$$J_\lambda = \frac{c_1 T}{c_2 \lambda^4},$$

который был выведен с использованием методов классической физики.

Если $h\nu \gg kT$, или $\lambda T \ll c_2$, то в знаменателе формулы (26.1) можно пренебречь единицей, тогда получим второй предельный случай – закон Вина:

$$J_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right).$$

Чтобы установить зависимость от температуры длины волны $\lambda_{\text{макс}}$, при которой функция J_λ достигает максимального значения, исследуем на максимум функцию (26.1). Имеем:

$$\frac{dJ_\lambda}{d\lambda} = \frac{-5 \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right) + \frac{c_2}{\lambda T} \exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)}{\lambda^6 \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right)} = 0.$$

Введя обозначение $x = \frac{c_2}{\lambda T}$, получим следующее уравнение:

$$-5(e^x - 1) + xe^x = 0.$$

Решая это трансцендентное уравнение, получим $x = 4,965$ и, следовательно, закон смещения Вина имеет вид

$$\lambda_{\text{макс}} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}.$$

Таким образом, значение величины $\lambda_{\text{макс}}$ смещается в сторону более коротких волн с ростом температуры.

Закон Стефана – Больцмана

Австрийские физики Й. Стефан в 1879 г. экспериментально и Л. Больцман в 1884 г. теоретически открыли закон, который устанавливает связь плотности интегрального полусферического излучения абсолютно черного тела с его абсолютной температурой

$$E_0 = \sigma \cdot T^4 \quad (\text{Вт/м}^2),$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Для удобства практических расчетов эта зависимость обычно представляется в виде

$$E_0 = 5,67 (T/100)^4.$$

Для серых тел, излучательная способность которых меньше, чем для черных тел, а собственное излучение также пропорционально четвертой степени температуры, закон принимает вид

$$E = \varepsilon \cdot E_0,$$

где ε – интегральная или средняя степень черноты серого тела.

Таким образом, закон Стефана – Больцмана является теоретической основой для вычисления потока энергии, излучаемой всяким нагретым телом, если известны его температура и радиационные характеристики.

Закон Стефана – Больцмана может быть получен из закона Планка с учетом того, что $E_0 = \int_0^{\infty} J_{\lambda} d\lambda$.

Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа описывает одно из наиболее общих свойств равновесного теплового излучения. Он устанавливает связь между способностью тела испускать и поглощать энергию излучения. В соответствии с условиями термодинамического равновесия выполняется требование равенства испускаемого и поглощаемого потоков излучения. Это условие распространяется на излучение в любом элементарном спектральном диапазоне, то есть на значения спектральных интенсивностей излучения. Отсюда следует, что в условиях термодинамического равновесия отношение спектральной интенсивности испускаемого потока излучения к спектральной поглощательной способ-

ности тела является одинаковым для всех тел и равным спектральной интенсивности потока излучения абсолютно черного тела при той же температуре:

$$\frac{J_{\lambda}}{A_{\lambda}} = J_{0\lambda}(\lambda, T).$$

Сформулированный закон, известный как *закон Кирхгофа*, относится к излучению в узком спектральном интервале.

Для излучения в полном спектре при термодинамическом равновесии также справедливо

$$\frac{E}{A} = E_0(T).$$

Из закона Кирхгофа вытекает ряд следствий, имеющих важное практическое значение.

Первое следствие: из всех тел в природе наибольшей излучательной способностью обладает абсолютно черное тело.

Второе следствие: при равновесном излучении коэффициент поглощения численно равен степени черноты: $A = \varepsilon$.

Третье следствие: если тело в каком-то интервале длин волн не поглощает энергию излучения, то оно в этом интервале длин волн и не излучает ее.

Закон Ламберта

Закон Ламберта определяет угловое распределение равновесного излучения. Наибольшей интенсивностью обладает поток излучения по нормали к излучающей поверхности, его называют яркостью излучения:

$$B = E/\pi.$$

Интенсивность излучения в общем случае зависит от направления и является величиной, пропорциональной косинусу угла между направлением излучения и нормалью к поверхности тела:

$$E = B \cos \varphi.$$

Закон Ламберта строго справедлив лишь для поверхности абсолютно черного тела в состоянии равновесия.

Угловые коэффициенты излучения

В случае, если излучающая система состоит из нескольких тел, произвольно расположенных в пространстве, то только часть потока излучения от одного тела попадает на другое. Доля потока излучения одного тела, попадающая на другое, зависит от формы, размеров тел, их взаимного расположения, расстояния между ними и т.д. Для учета той части потока излучения от поверхности одного тела, которая попадает на поверхность другого тела, используется понятие *углового коэффициента излучения*. Когда рассматривается поток излучения от элементарной площадки, находящейся на поверхности одного тела, на всю поверхность другого тела, угловой коэффициент излучения называется *локальным*, а когда – от всей поверхности одного тела на всю поверхность другого, угловой коэффициент излучения называется *средним*.

Угловые коэффициенты излучения характеризуют только геометрические особенности излучающей системы, т.е. ими учитывается только «прямое» попадание энергии излучения от одного тела на другое, а попадание посредством отражения от других тел никак не учитывается. Поэтому далее при выводе выражений для угловых коэффициентов излучения для простоты будем полагать, что тела, которые участвуют в теплообмене излучением, являются абсолютно черными.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте законы Планка, Релея – Джинса и Вина для равновесного излучения абсолютно черного тела.
2. Сформулируйте закон Стефана – Больцмана.
3. Сформулируйте закон Кирхгофа и следствия из него.
4. Сформулируйте закон Ламберта.
5. Дайте определение углового коэффициента излучения. Что такое локальный и средний коэффициенты излучения?
6. Перечислите виды угловых коэффициентов излучения.

Лекция 27.

**Теплообмен излучением между твердыми телами,
разделенными прозрачной (диатермичной) средой.
Тела с плоскопараллельными поверхностями**

Методы исследования процессов лучистого теплообмена. Теплообмен излучением в системе тел с плоскопараллельными поверхностями. Теплообмен при наличии экранов для плоскопараллельных тел. Коэффициент излучения твердых тел и методы его определения (радиационный, калориметрический, регулярного теплового режима, нагревания с постоянной скоростью).

Методы исследования процессов лучистого теплообмена

Существует два метода исследования процессов лучистого теплообмена: метод многократных отражений и метод сальдо [8, 18].

Метод многократных отражений основан на зависимостях, характеризующих изменение величины лучистой энергии какого-либо тела по отдельным стадиям затухающих поглощений и отражений в процессе лучистого теплообмена с окружающими его телами. Этот метод наглядно вскрывает механизм протекания лучистого переноса тепла в конкретных излучающих системах. Однако, будучи весьма детальным, связан с громоздкими вычислениями, которые затруднительны для сложных геометрических систем.

Метод сальдо состоит лишь в количественном анализе этих лучистых процессов, причем оперируют величинами, характеризующими конечные эффекты теплообмена между телами, составляющими данную излучающую систему. Не обладает наглядностью, но и не содержит громоздких вычислений.

Продemonстрируем использование обоих методов на простейшей системе твердых тел, состоящей из двух неограниченных тел с плоскопараллельными поверхностями. Примем следующие допущения:

- 1) все тела, входящие в излучающую систему, подчиняются закону Ламберта в отношении как собственного, так и отраженного излучений;
- 2) тела непрозрачные ($D = 0$) имеют изотермические поверхности, и вся лучистая энергия, поглощаемая ими, переходит в тепловую энергию, причем перенос тепла за счет теплопроводности и конвекции отсутствует;
- 3) коэффициенты поглощения и степени черноты не зависят от температуры, процесс лучистого теплообмена – стационарный.

Теплообмен излучением в системе тел с плоскопараллельными поверхностями

Рассмотрим излучающую систему, которая состоит из двух тел, имеющих очень большие размеры по сравнению с расстоянием между ними (рис. 27.1). Температура, коэффициент поглощения и излучательная способность поверхностей этих тел, соответственно, равны T_1, A_1, E_1 и T_2, A_2, E_2 , причем для определенности примем $T_1 > T_2$. Применим метод многократных отражений. Для этого проследим движение лучистой энергии, испускаемой телом 1:

- тело 1 излучает E_1 ; (а)
 - тело 2 поглощает $E_1 A_2$; (б)
 - тело 2 отражает обратно $E_1(1 - A_2)$; (в)
 - тело 1 поглощает из отраженного 2 $E_1(1 - A_2)A_1$; (г)
 - тело 1 отражает из отраженного 2 $E_1(1 - A_2)(1 - A_1)$; (д)
 - тело 2 поглощает из отраженного 1 $E_1(1 - A_2)(1 - A_1)A_2$; (е)
 - тело 2 отражает из отраженного 1 $E_1(1 - A_2)(1 - A_1)(1 - A_2)$; (ж)
 - тело 1 снова поглощает из отраженного 2 $E_1(1 - A_2)(1 - A_1)(1 - A_2)A_1$ (з)
- и т. д.

Для тела 2 имеют место аналогичные соотношения, в которых только меняются местами индексы 1 и 2:

- тело 2 излучает E_2 ; (а')
 - тело 1 поглощает $E_2 A_1$; (б')
 - тело 1 отражает обратно $E_2(1 - A_1)$; (в')
- и т. д.

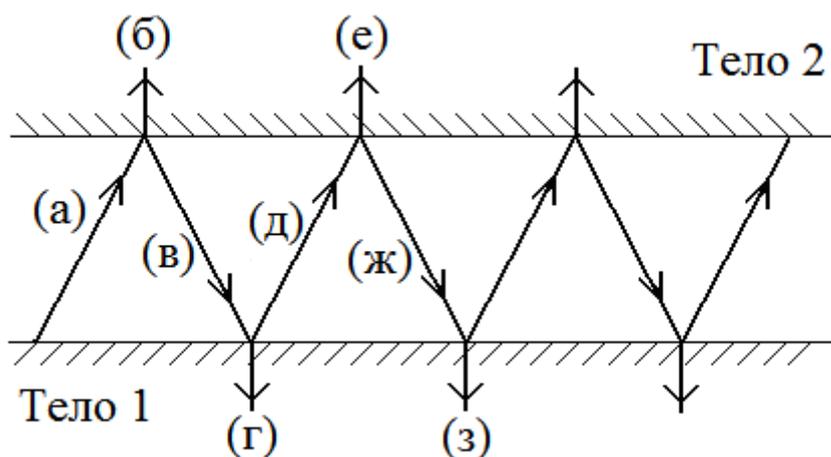


Рис. 27.1

Результирующий тепловой поток может быть представлен как разность собственного излучения тела 1 и поглощенного от собственного и излучения тела 2 согласно зависимости $q_{рез} = E - E_{погл} = E - A E_{пад}$,

Количество энергии, поглощенное телом из собственного излучения, определяется суммой (г), (з) и т. д.:

$$E_1(1+k+k^2+\dots)(1 - A_2)A_1 = E_1(1/(1 - k))(1 - A_2)A_1$$

с учетом того, что здесь обозначено $k = (1 - A_2)(1 - A_1)$, и суммой геометрической прогрессии слева.

Из (а') и (б') тело 1 поглощает из излучения тела 2 количество энергии

$$E_2(1 + k + k^2 + \dots)A_1 = E_2A_1/(1 - k),$$

тогда

$$q_{\text{рез}} = E_1 - E_1(1 - A_2)A_1/(1 - k) - E_2A_1/(1 - k).$$

Приведем это выражение к общему знаменателю с учетом того, что знаменатель можно заменить величиной $1 - k = 1 - (1 - A_2)(1 - A_1) = A_1 + A_2 - A_1A_2$. Тогда результирующий поток, который получает тело 1, представится зависимостью

$$q_{\text{рез}} = q_{1,2} = \frac{E_1A_2 - E_2A_1}{A_1 + A_2 - A_1A_2} \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

Последнюю зависимость можно представить через приведенную поглощательную способность или приведенный коэффициент излучения рассматриваемой системы твердых тел, если излучательную способность их представить по закону Стефана – Больцмана и приближенно считать $\varepsilon = A$ (что, вообще говоря, имеет место только при равновесном излучении):

$$E_1 = c_0\varepsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 = c_0A_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 ;$$

$$E_2 = c_0\varepsilon_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 = c_0A_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 .$$

С учетом этих соотношений результирующий поток представится зависимостями (после деления числителя и знаменателя на величину A_1A_2):

$$q_{1,2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] / \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 \right) = c_0A_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

или



$$q_{1,2} = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \text{ Вт/м}^2,$$

где приведенный коэффициент поглощения системы

$$A_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}$$

и ее приведенный коэффициент излучения

$$c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}}, \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4).$$

Полученные зависимости показывают, что результирующий поток пропорционален приведенному коэффициенту излучения (поглощения) системы и разности температур в четвертых степенях тел, составляющих эту систему.

Необходимо напомнить, что перенос тепла в процессах теплопроводности и конвекции пропорционален разности первых степеней температур. Этим обстоятельством и объясняется более значительное влияние лучистого переноса тепла по сравнению с процессами теплопроводности и конвекции при высоких температурах.

Рассмотрим применение второго метода исследования лучистого теплообмена – метода сальдо.

Согласно зависимости $q_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}$ результирующий лучистый поток для первого тела составит величину

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{эф} 1} - E_{\text{эф} 2},$$

так как и для второго тела принимается, что падающее излучение

$$E_{\text{пад} 2} = E_{\text{эф} 2}$$

Эффективное излучение каждого из рассматриваемых тел можно представить соотношениями:

$$E_{\text{эф} 1} = q_{1,2} \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{E_1}{A_1};$$

$$E_{\text{эф}2} = q_{2,1} \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{E_2}{A_2}.$$

При установившемся тепловом режиме $q_{1,2} = -q_{2,1}$. Тогда после подстановки получим

$$q_{1,2} = q_{1,2} \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{E_1}{A_1} + q_{1,2} \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) - \frac{E_2}{A_2},$$

$$q_{1,2} = \frac{\frac{E_1}{A_1} - \frac{E_2}{A_2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}.$$

После подстановки значений собственного излучения обоих тел получим ранее найденные зависимости, но более коротким путем, чем по методу многократных отражений.

Полный результирующий поток

$$Q_{1,2} = q_{1,2} F_1 = c_{\text{пр}} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \text{ Вт.}$$

Если коэффициент излучения $c_2 \cong c_0$, то приведенный коэффициент излучения равен коэффициенту излучения тела 1 $c_{\text{пр}} = c_1$.

Теплообмен излучением при наличии экранов для плоскопараллельных тел

Лучистый теплообмен может быть уменьшен за счет применения экранов ([рис. 27.2](#)), которые устанавливаются ортогонально к направлению распространения теплового излучения и выполняются из материалов с малой поглощательной и большой отражательной способностями (полированные тонкие листы алюминия, меди и др.). В результате переизлучения экранами в направлении, обратном направлению распространения тепла, величина результирующего теплового потока уменьшается.

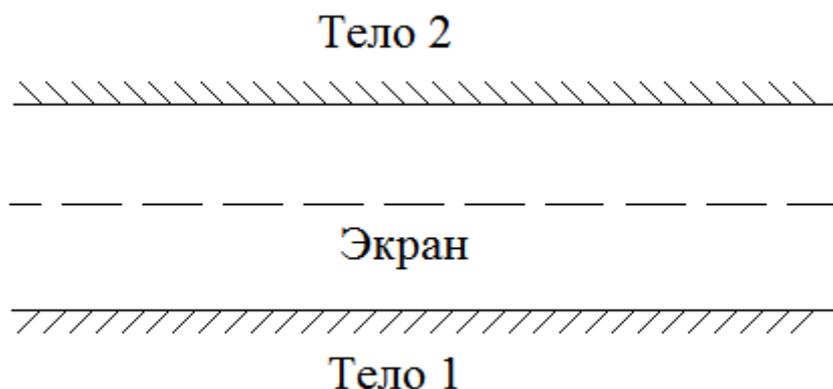


Рис. 27.2

Рассмотрим предыдущий случай системы, состоящей из двух тел с плоскопараллельными поверхностями. Установим между ними экран. Для простоты положим, что коэффициенты излучения всех тел одинаковы, или $A_1 = A_2 = A$ и $T_1 > T_2$. Пренебрежем тепловым сопротивлением экрана $[R_{\text{эк}} = (\delta/\lambda)_{\text{эк}} = 0]$. Температура экрана $T_{\text{эк}}$ не задана. Найдем эту температуру. Результирующий тепловой поток можно представить следующими двумя зависимостями:

$$q_{\text{эк1}} = c_0 A_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{эк}}}{100} \right)^4 \right];$$

$$q_{\text{эк2}} = c_0 A_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_{\text{эк}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

При стационарном режиме $q_{\text{эк1}} = q_{\text{эк2}}$. Следовательно, искомая температура экрана

$$\left(\frac{T_{\text{эк}}}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Тогда после подстановки этого значения получаем:

$$q_{\text{эк1}} = \frac{1}{2} c_0 A_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \frac{1}{2} q_{1,2}.$$

Следовательно, при использовании одного экрана результирующий тепловой поток снижается вдвое по сравнению с тепловым потоком в отсутствии экранов.

При использовании n последовательно установленных экранов при аналогичных условиях результирующий поток может быть представлен $n + 1$ уравнением, аналогичным записанным выше:

$$q_{1,эк1} = c_0 A_{пр} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{эк1}}{100} \right)^4 \right];$$

$$q_{эк1,эк2} = c_0 A_{пр} \left[\left(\frac{T_{эк1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{эк2}}{100} \right)^4 \right];$$

$$q_{эк.n2} = c_0 A_{пр} \left[\left(\frac{T_{экn}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Сложим правые и левые части уравнений. С учетом того, что имеет место равенство удельных тепловых потоков при стационарном режиме:

$$q_{1,эк1} = q_{эк1,эк2} = \dots = q_{эк.n2} = q_{(1,2)эк}.$$

получим

$$q_{(1,2)эк} = \frac{1}{n+1} c_0 A_{пр} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \frac{1}{n+1} q_{1,2}.$$

Следовательно, при наличии n экранов результирующий поток уменьшится в $n + 1$ раз. Неизвестные температуры экранов могут быть найдены из следующего выражения:

$$\left(\frac{T_{эк.n}}{100} \right)^4 = \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - n \frac{q_{(1,2)эк}}{c_0 A_{пр}}.$$

Если коэффициенты излучения тел и экранов различны, то при установке n защитных от теплового излучения экранов тепловой поток

$$q_{\text{л}} = \frac{c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{A_1} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_{\text{эки}}} + \frac{1}{A_2} - (n+1)}$$

Коэффициент излучения твердых тел и методы его определения (радиационный, калориметрический, регулярного теплового режима, нагревания с постоянной скоростью)

Для определения результирующих тепловых потоков необходимо располагать данными по коэффициенту излучения. Для реальных тел коэффициент излучения является сложной функцией, зависящей от природы излучающего тела, его температуры, состояния поверхности, а для металлов – от степени окисления этой поверхности. Для чистых металлов с полированными поверхностями коэффициент излучения имеет низкие значения. Так при температуре 100°С коэффициент излучения металлов по отношению к его величине для абсолютно черного тела не превышает 0,1. Коэффициент излучения металлов практически линейно зависит от температуры.

Радиационный метод является относительным методом. Он основан на сравнении излучения исследуемого тела с излучением абсолютно черного или другого тела (эталоны) с известным коэффициентом излучения.

Калориметрический метод основан на непосредственном измерении лучистого теплового потока, испускаемого исследуемым телом. Поэтому в отличие от радиационного метода он является абсолютным.

Метод регулярного теплового режима. В основу этого метода положена первая теорема Кондратьева из теории теплового регулярного режима метода нестационарной теплопроводности. Опыт сводится к определению темпа охлаждения в порядке, обычном для регулярного режима.

Метод нагревания с постоянной скоростью. Образец исследуемого материала простой геометрической формы, например, в форме цилиндра, помещается внутри массивного цилиндрического блока, служащего для создания равномерного температурного поля вокруг образца. Внутренние размеры кожуха мало отличаются от внешних размеров опытного образца. Теплообмен между образцом и блоком при наличии температурного перепада осуществляется лишь за счет теплового излучения. Температурный перепад создается нагревателями блока и печи, в которую помещается блок с образцом. Они обеспечивают режим, при котором скорость нагревания образца сохраняется постоянной при условиях $Bi < 0,1$.

Контрольные вопросы

1. Перечислите методы исследования процессов лучистого теплообмена. Поясните их основные особенности и отличия.
2. Перечислите допущения, необходимые для исследования теплообмена в системе, состоящей из двух неограниченных твердых тел с плоскопараллельными поверхностями.
3. Укажите основные этапы при выводе выражения для результирующего потока излучения в системе двух плоскопараллельных тел методом многократных отражений.
4. Как определяется результирующий поток излучения в системе двух плоскопараллельных тел методом сальдо?
5. Что называют приведенным коэффициентом поглощения в системе двух плоскопараллельных тел, приведенным коэффициентом излучения? Запишите соответствующие выражения и единицы измерения.
6. Запишите выражение для результирующего лучистого потока в системе двух плоскопараллельных тел?
7. Как определить полный результирующий поток в системе двух плоскопараллельных тел?
8. Как влияет на результирующий поток излучения установка экранов? Какой должна быть степень черноты экранов?
9. Как влияет на результирующий поток излучения в системе двух плоскопараллельных тел местоположение экранов относительно излучающих поверхностей?
10. Во сколько раз снижает тепловой поток в системе двух плоскопараллельных тел установка n экранов, имеющих одинаковую с излучающими поверхностями степень черноты? Как в этом случае определить температуру экранов?
11. Как определяются приведенный коэффициент излучения и приведенный коэффициент поглощения в системе плоскопараллельных тел с экранами?
12. Как определить результирующий поток излучения в системе двух плоскопараллельных тел с экранами?
13. От каких параметров зависит коэффициент излучения твердых тел?
14. Какими методами можно определить коэффициент излучения твердых тел?

Лекция 28. Тело с оболочкой и произвольно расположенные тела

Теплообмен излучением между телом и его оболочкой. Теплообмен при наличии экранов для тела с оболочкой. Теплообмен излучением между двумя телами, произвольно расположенными в пространстве. Методы определения угловых коэффициентов излучения. Геометрические свойства лучистых потоков.

Теплообмен излучением между телом и его оболочкой. Теплообмен при наличии экранов для тела с оболочкой

Рассмотрим два тела, из которых одно находится в полости другого тела (рис. 28.1). Тело 1 только выпуклое, тело 2 – вогнутое. Для них известны площади поверхностей F_1 и F_2 , поглощательные способности A_1 и A_2 , а также температуры T_1 и T_2 , причем $T_1 > T_2$. Уравнение для результирующего теплового потока в этом случае

$$Q_{1,2} = Q_{\text{эф}1} - \bar{\varphi}_{2,1} Q_{\text{эф}2}, \quad (28.1)$$

где $\bar{\varphi}_{2,1}$ – средний угловой коэффициент излучения, характеризующий часть энергии эффективного излучения, которое попадает с тела 2 на тело 1.

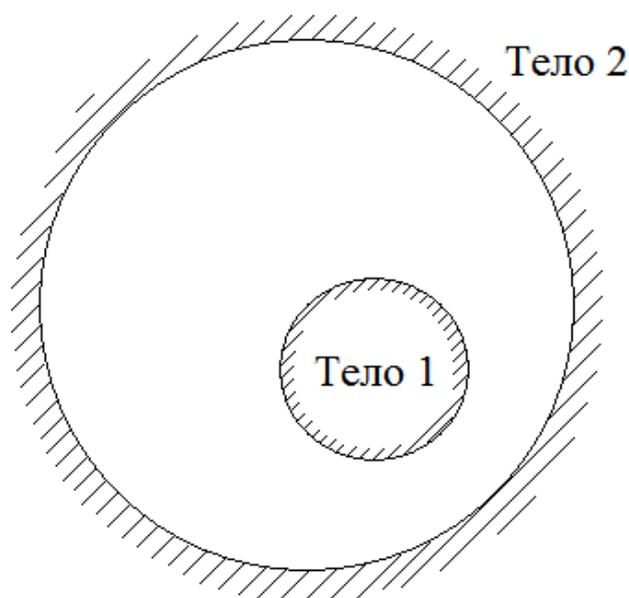


Рис. 28.1

Согласно определению $E_{\text{эф}} = q_{\text{рез}} \left(1 - \frac{1}{A} \right) + \frac{E}{A}$, полные потоки эффективного излучения рассматриваемых тел выражаются соотношениями:

$$Q_{\text{эф}1} = Q_{1,2} \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{Q_1}{A_1};$$

$$Q_{\text{эф}2} = Q_{2,1} \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{Q_2}{A_2}.$$

После подстановки этих соотношений в зависимость (28.1) с учетом того, что $Q_{1,2} = -Q_{2,1}$, получим:

$$Q_{1,2} = \frac{\frac{Q_1}{A_1} - \bar{\Phi}_{1,2} \frac{Q_2}{A_2}}{\frac{1}{A_1} + \bar{\Phi}_{1,2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}.$$

Согласно уравнению Стефана – Больцмана собственные излучения обоих тел выражаются уравнениями:

$$Q_1 = F_1 c_0 \varepsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4$$

$$Q_2 = F_2 c_0 \varepsilon_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4.$$

Если принять $\varepsilon = A$, то полный результирующий поток

$$Q_{1,2} = c_0 \left[F_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - F_2 \bar{\Phi}_{1,2} \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] / \left[\frac{1}{A_1} + \bar{\Phi}_{1,2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \right].$$

В этой зависимости, кроме полного результирующего потока $Q_{1,2}$, неизвестной величиной является средний угловой коэффициент излучения $\bar{\Phi}_{2,1}$. Положим временно, что температуры тел одинаковы. Этому условию

соответствует $Q_{1,2} = 0$, что может иметь место, когда $F_1 - F_2 \bar{\varphi}_{2,1} = 0$; откуда получаем $\bar{\varphi}_{2,1} = F_1 / F_2$.

Поэтому результирующий поток

$$Q_{1,2} = c_{\text{пр}1,2} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = c_0 A_{\text{пр}} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

где

$$A_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \frac{F_1}{F_2}}; \quad c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right) \frac{F_1}{F_2}}.$$

В частном случае (рис. 28.2, а), когда $F_1 \approx F_2$, средний угловой коэффициент излучения $\bar{\varphi}_{2,1} = 1$. Вся энергия излучения тела 1 попадает на тело 2, поэтому получаем решение как для системы плоскопараллельных тел.

Если одно тело мало по сравнению с другим (рис. 28.2, б): $F_1 \ll F_2$, то значение среднего углового коэффициента стремится к нулю $\bar{\varphi}_{2,1} \rightarrow 0$, при этом $c_2 \cong c_0$, тогда $c_{\text{пр}} = c_1$.

Наличие экранов в системе тела с оболочкой (рис. 28.3) снижает результирующий тепловой поток. В отличие от случая с плоскими экранами действие сферических и цилиндрических экранов зависит от их расположения относительно излучающего тела, так как в зависимости от этого меняются угловые коэффициенты излучения. Экранирование оказывается наиболее эффективным, когда цилиндрический или сферический экран установлен вблизи тела, имеющего более высокую температуру.

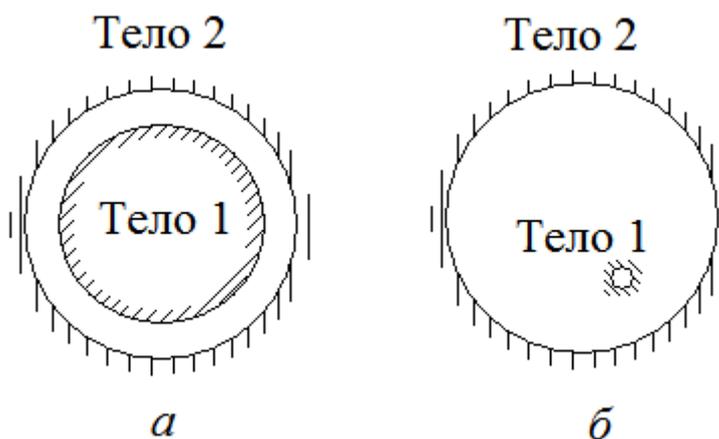


Рис. 28.2

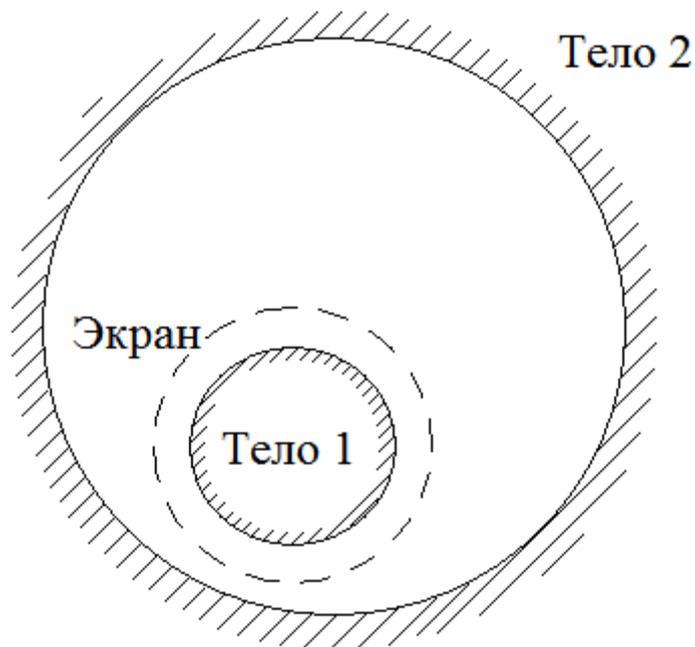


Рис. 28.3

При наличии одного экрана в случае разных коэффициентов излучения тел для результирующего теплового потока можно записать следующие выражения:

$$Q_{1,эк} = c_0 A_{1,эк} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{эк}}{100} \right)^4 \right] \bar{\Phi}_{1,эк},$$

$$Q_{эк,2} = c_0 A_{эк,2} F_{эк} \left[\left(\frac{T_{эк}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \bar{\Phi}_{эк,2},$$

где соответствующие приведенные коэффициенты поглощения:

$$A_{1,эк} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_{эк}} - 1 \right) \frac{F_1}{F_{эк}}}$$

$$A_{эк,2} = \frac{1}{\frac{1}{A_{эк}} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \frac{F_{эк}}{F_2}}.$$

Учтем, что $\bar{\varphi}_{1,эк} = \bar{\varphi}_{эк,2}$, так как $F_1 < F_{эк}$ и $F_{эк} < F_2$, а также $Q_{1,эк} = Q_{эк,2} = Q_{(1,2)эк}$, получим:

$$A_{1,эк} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{эк}}{100} \right)^4 \right] = A_{эк,2} F_{эк} \left[\left(\frac{T_{эк}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

откуда температура экрана

$$\left(\frac{T_{эк}}{100} \right)^4 = \frac{A_{1,эк} F_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + A_{эк,2} F_{эк} \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}{A_{1,эк} F_1 + A_{эк,2} F_{эк}},$$

а результирующий поток

$$Q_{(1,2),эк} = \frac{c_0 A_{1,эк} A_{эк,2}}{A_{1,эк} F_1 + A_{эк,2} F_{эк}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1 F_{эк}$$

или

$$Q_{(1,2)эк} = c_0 A_{(1,2)эк} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

где
$$A_{(1,2)эк} = \frac{1}{\frac{1}{A_{1,эк}} + \frac{F_1}{F_{эк}} \frac{1}{A_{эк,2}}}.$$

С учетом зависимостей для приведенных коэффициентов поглощения

$$A_{(1,2)эк} = \frac{1}{\frac{1}{A_{1,2}} + \left(\frac{2}{A_{эк}} - 1 \right) \frac{F_1}{F_{эк}} + \frac{F_1}{F_2}}, \quad (28.2)$$

Здесь $A_{1,2} = A_{пр}$ – приведенная поглощательная способность системы с оболочкой при отсутствии экрана.

Из анализа зависимости (28.2) следует, что малые величины $A_{(1,2)эк}$, которым соответствуют малые значения результирующих лучистых потоков, получаются, если $F_{эк} \rightarrow F_1$ и $A_{эк} \rightarrow 0$.

При наличии n экранов приведенный коэффициент поглощения

$$A_{(1,2)эк} = \frac{1}{\frac{1}{A_{1,2}} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{A_{эки}} - 1 \right) \frac{F_1}{F_{эки}} + \frac{F_1}{F_2}}$$

В рассмотренном расчете перенос тепла за счет теплопроводности и конвекции не учитывался.

**Теплообмен излучением между двумя телами,
произвольно расположенными в пространстве.
Методы определения угловых коэффициентов излучения**

Рассмотрим два черных тела, которые имеют изотермические поверхности с температурами T_1 и T_2 . Самооблучение этих тел отсутствует, т.е. $\bar{\varphi}_{1,1} = \bar{\varphi}_{2,2} = 0$. Тела произвольно расположены в пространстве. Требуется определить результирующий тепловой поток. Для этого выделяются на каждом из рассматриваемых тел элементарные площадки dF_1 и dF_2 , бесконечно малые по сравнению с расстоянием между ними r (рис. 28.4). Принимается, что тела являются однородными и изотропными, яркость излучения одинакова по всем направлениям.

Лучистый поток, падающий с элементарной площадки dF_1 на площадку dF_2 ,

$$d^2Q_{пад1} = B_1 d\omega_1 \cos \psi_1 dF_1.$$

Тепловой поток, падающий с площадки dF_2 на площадку dF_1 ,

$$d^2Q_{пад2} = B_2 d\omega_2 \cos \psi_2 dF_2$$

Элементарные телесные углы согласно $d\omega = dF / r^2$ можно представить соотношениями:

$$d\omega_1 = dF_2 \cos \psi_2 / r^2,$$

$$d\omega_2 = dF_1 \cos \psi_1 / r^2.$$

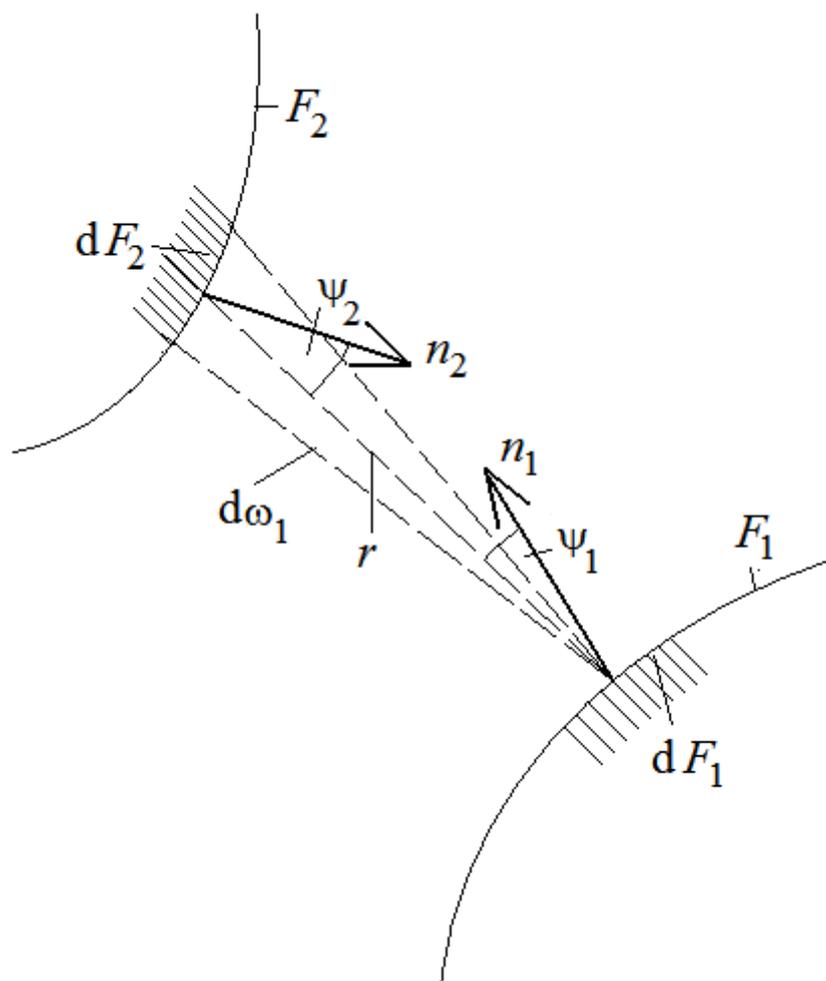


Рис. 28.4

Яркость излучения каждой из площадок выражается через плотность полусферического излучения как $B = E / \pi$. Тогда

$$d^2Q_{\text{пад}1} = E_1 \frac{\cos \psi_2 \cos \psi_1}{\pi r^2} dF_2 dF_1,$$

$$d^2Q_{\text{пад}2} = E_2 \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2.$$

Введем обозначения

$$d\varphi_{1,2} = \frac{\cos \psi_2 \cos \psi_1}{\pi r^2} dF_2,$$

$$d\varphi_{2,1} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1,$$

где $d\varphi_{1,2}$ и $d\varphi_{2,1}$ – элементарные угловые коэффициенты излучения площадок dF_1 на dF_2 и dF_2 на dF_1 .

Тогда

$$d^2Q_{\text{пад1}} = E_1 dF_1 d\varphi_{1,2} = dQ_1 d\varphi_{1,2},$$

$$d^2Q_{\text{пад2}} = E_2 dF_2 d\varphi_{2,1} = dQ_2 d\varphi_{2,1}.$$

Из последних зависимостей следует, что:

$$d\varphi_{1,2} = \frac{d^2Q_{\text{пад1}}}{dQ_1},$$

$$d\varphi_{2,1} = \frac{d^2Q_{\text{пад2}}}{dQ_2}.$$

Здесь dQ_1 и dQ_2 – полные лучистые потоки, испускаемые площадками dF_1 и dF_2 во всех направлениях.

Таким образом, элементарный угловой коэффициент излучения характеризует долю лучистой энергии, которая попадает с элементарной площадки одного тела на элементарную площадку другого тела, по отношению к полному лучистому потоку, испускаемому площадкой первого тела.

Произведение элементарного углового коэффициента излучения на величину соответствующей элементарной площадки тела носит название элементарной взаимной поверхности излучения. В соответствии с этим уравнения принимают вид

$$d^2Q_{\text{пад1}} = E_1 d^2H_{1,2},$$

$$d^2Q_{\text{пад2}} = E_2 d^2H_{2,1},$$

где $d^2H_{1,2} = d\varphi_{1,2}dF_1$ и $d^2H_{2,1} = d\varphi_{2,1}dF_2$ – элементарные взаимные поверхности излучения.

Введем местные (локальные) значения угловых коэффициентов излучения или местные коэффициенты облученности:

$$\varphi_{1,2} = \int_{F_2} d\varphi_{1,2} = \int_{F_2} \frac{\cos \psi_2 \cos \psi_1}{\pi r^2} dF_2,$$

$$\varphi_{2,1} = \int_{F_1} d\varphi_{2,1} = \int_{F_1} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1.$$

Тогда

$$dQ_{\text{пад1}} = E_1 dF_1 \varphi_{1,2} = dQ_1 \varphi_{1,2},$$

$$dQ_{\text{пад2}} = E_2 dF_2 \varphi_{2,1} = dQ_2 \varphi_{2,1}.$$

Из этих зависимостей имеем:

$$\varphi_{1,2} = \frac{dQ_{\text{пад1}}}{dQ_1}$$

$$\varphi_{2,1} = \frac{dQ_{\text{пад2}}}{dQ_2}.$$

Следовательно, местный угловой коэффициент излучения характеризует долю лучистой энергии, испускаемую элементарной площадкой dF_1 (dF_2) на тело с поверхностью F_2 (F_1), по отношению к полной энергии dQ_1 (dQ_2), излучаемой площадкой dF_1 (dF_2) в полусферу. Он зависит от расположения тел в пространстве, расстояния между ними, а также от формы этих тел. Для системы черных тел угловой коэффициент излучения является чисто геометрической характеристикой. Для системы реальных тел угловой коэффициент может зависеть от поглощательной способности, поэтому не является чисто геометрической характеристикой.

Взаимные поверхности излучения $dH_{1,2} = \varphi_{1,2} dF_1$ и $dH_{2,1} = \varphi_{2,1} dF_2$ характеризуют излучение площадки dF_1 (dF_2) на тело с поверхностью F_2 (F_1).

Найдем результирующий тепловой поток:

$$dQ_{1,2} = dQ_{\text{пад1}} - dQ_{\text{пад2}} = E_1 dF_1 \varphi_{1,2} - E_2 dF_2 \varphi_{2,1}.$$

Для равновесного излучения температуры тел одинаковы. Этому условию соответствует $dQ_{1,2} = 0$, что может иметь место, когда $dF_1 \varphi_{1,2} - dF_2 \varphi_{2,1} = 0$; откуда получаем $dH_{2,1} = dH_{1,2}$. Тогда

$$dQ_{1,2} = (E_1 - E_2) dH_{1,2} = (E_1 - E_2) dH_{2,1}.$$

Подставив значения излучательной способности из закона Стефана – Больцмана, получаем:

$$dQ_{1,2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] dH_{1,2}.$$

Общий результирующий поток представится зависимостью

$$Q_{1,2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \bar{H}_{1,2}.$$

Здесь $\bar{H}_{1,2} = \int_{F_1} \varphi_{1,2} dF_1 = \bar{\varphi}_{1,2} F_1$ – средняя взаимная поверхность излучения, а

$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{F_1} \int \varphi_{1,2} dF_1 = \frac{\bar{H}_{1,2}}{F_1} = \frac{Q_{\text{пад1}}}{Q_1}$ – средний угловой коэффициент излучения

(коэффициент облученности), который показывает, какая часть энергии попадает с тела поверхностью F_1 на тело с поверхностью F_2 по отношению к полному излучению первого тела. Аналогичное соотношение имеет место и для второго тела.

Результирующий поток для системы, состоящей из двух серых тел, может быть найден по аналогичному уравнению, если в него вместо потоков собственного излучения ввести эффективные потоки излучения:

$$Q_{1,2} = Q_{\text{эф1}} \bar{\varphi}_{1,2} - Q_{\text{эф2}} \bar{\varphi}_{2,1}.$$

Геометрические свойства лучистых потоков

Свойство взаимности лучистых потоков. Так как $d^2H_{2,1} = d^2H_{1,2}$, то $d\varphi_{1,2} dF_1 = d\varphi_{2,1} dF_2$. Аналогично $dH_{2,1} = dH_{1,2}$ или $\varphi_{1,2} dF_1 = \varphi_{2,1} dF_2$. И, наконец, $\bar{H}_{2,1} = \bar{H}_{1,2}$ или $\bar{\varphi}_{1,2} F_1 = \bar{\varphi}_{2,1} F_2$.

Свойство замыкаемости потоков тепла. Если учесть теплообмен данного тела со всеми телами (пусть в теплообмене участвует n тел), то $\sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_{1,i} = 1$

или $\sum_{i=1}^n \bar{H}_{1,i} = F_1$. Здесь учтено также самооблучение тела, т. е. $\bar{\varphi}_{1,1} \neq 0$.

Свойство затеняемости состоит в том, что результирующий поток от тела 1 к телу 2 равен нулю, если на пути лучей находится непрозрачное тело. Тогда $Q_{1,2} = 0$, $\bar{\varphi}_{1,2} = 0$, $\bar{\varphi}_{2,1} = 0$.

Для плоского и выпуклого тел самооблучение отсутствует и, следовательно, $\bar{\varphi}_{1,1} = \bar{\varphi}_{2,2} = 0$. Для вогнутых тел $\bar{\varphi}_{1,1} > 0$ и $\bar{\varphi}_{2,2} > 0$. В общем случае угловые коэффициент могут изменяться от нуля до единицы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение среднего углового коэффициента излучения, запишите единицы измерения и выражение для его вычисления для тела с оболочкой.
2. Запишите выражение для результирующего потока излучения, если тело полностью находится внутри оболочки.
3. Запишите выражения для приведенных коэффициентов излучения и поглощения для тела с оболочкой.
4. Чему равны средний угловой коэффициент излучения и приведенный коэффициент излучения для тела с оболочкой, если их площади поверхности примерно равны?
5. Чему равны средний угловой коэффициент излучения и приведенный коэффициент излучения для тела с оболочкой, если площадь поверхности тела значительно меньше площади поверхности оболочки?
6. Как влияет на результирующий поток излучения установка экранов? Какой должна быть степень черноты экранов?
7. Как влияет на результирующий поток излучения для тела с оболочкой местоположение экранов относительно излучающих поверхностей?
8. Как определить температуру экрана для тела с оболочкой?
9. Как определяются приведенный коэффициент излучения и приведенный коэффициент поглощения, если между телом и оболочкой установлены экраны?
10. Как определить результирующий поток излучения в системе двух плоскопараллельных тел с экранами?
11. Поясните методику определения результирующего потока излучения для тел, произвольно расположенных в пространстве.
12. Запишите выражение для результирующего потока излучения двух черных тел, произвольно расположенных в пространстве.
13. Дайте определение и запишите выражения для следующих величин: элементарный угловой коэффициент излучения, местный коэффициент облученности, коэффициент облученности.
14. Дайте определение и запишите выражения для следующих величин: элементарная взаимная поверхность излучения, взаимная поверхность излучения, средняя взаимная поверхность излучения.
15. Запишите выражение для результирующего потока излучения двух серых тел, произвольно расположенных в пространстве.
16. Перечислите и охарактеризуйте геометрические свойства лучистых потоков.

Лекция 29. Излучение газов и паров

Особенности излучения газов и паров. Степень черноты углекислого газа и водяного пара. Основы переноса излучения в поглощающих, излучающих и рассеивающих средах. Закон Бугера. Сложный теплообмен. Коэффициент теплоотдачи излучением.

Особенности излучения газов и паров. Степень черноты углекислого газа и водяного пара

Одно- и двухатомные газы (гелий, водород, кислород, азот и др.) практически являются прозрачными (диатермичными) для теплового излучения [8, 21]. Трехатомные газы обладают большей излучательной и поглощательной способностями. К ним относятся такие распространенные в практике газы, как H_2O и CO_2 .

В отличие от твердых и жидких тел излучение газов носит объемный характер, так как в нем участвуют все микрочастицы газа, заключенного в рассматриваемом объеме. Поэтому поглощательная способность газа изменяется в зависимости от плотности и толщины газового слоя. Чем больше плотность и толщина слоя газа, тем больше его поглощательная способность.

Излучение газов носит избирательный (селективный) характер. Они излучают и поглощают энергию только в определенных интервалах длин волн. В большей же части спектра газы являются прозрачными для теплового излучения.

Наиболее распространенными в теплотехнике являются дымовые газы. Их основными элементами являются углекислый газ и водяной пар, полосы поглощения которых частично совпадают. Спектральные полосы поглощения CO_2 уже, чем H_2O , поэтому поглощательная способность и степень черноты водяного пара существенно выше, чем углекислого газа. При малых толщинах слоя преобладает влияние излучения CO_2 , а при больших – излучение H_2O .

Для обоих газов излучение значительно отклоняется от закона четвертых степеней абсолютной температуры Стефана – Больцмана, а излучательная способность может быть представлена зависимостями [18]:

$$E_{\text{CO}_2} = 3,5 \cdot (pl)^{0,33} (T / 100)^{3,5},$$

$$E_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5 \cdot p^{0,8} l^{0,6} (T / 100)^3.$$

Опытные данные по зависимости степени черноты углекислого газа и водяного пара от температуры при различных величинах параметра pl показывают, что даже в предельных случаях (pl стремится к бесконечности) степень черноты рассматриваемых газов существенно меньше единицы. При этом предельная степень черноты для водяного пара в несколько раз больше, чем предельная степень черноты для углекислого газа.

Основы переноса излучения в поглощающих, излучающих и рассеивающих средах. Закон Бугера

При прохождении тепловых лучей в поглощающей газовой среде поглощенная лучистая энергия переходит в теплоту и излучается этой средой. В результате процессов поглощения и переизлучения происходит перенос лучистой энергии и тепла в поглощающей среде.

Пусть имеется слой газа, на который падает поток лучистой энергии, имеющий сплошной спектр. Некоторая часть лучей при этом пройдет через поглощающую среду без изменения интенсивности, и только лучи, имеющие определенную длину, будут поглощаться газом. Интенсивность потока лучистой энергии по мере прохождения через слой газа будет постепенно уменьшаться.

Приближенно принимается (рис. 29.1), что ослабление интенсивности излучения по отдельным длинам волн при прохождении через слой толщиной dl уменьшается пропорционально этой интенсивности и бесконечно малому прохождению пути луча dl :

$$-dJ_l = \kappa_\lambda J_l dl,$$

где κ_λ – коэффициент ослабления луча.

Это выражение является основным законом переноса лучистой энергии в поглощающей среде. Его можно представить в виде

$$-\frac{dJ_l}{J_l} = \kappa_\lambda dl.$$

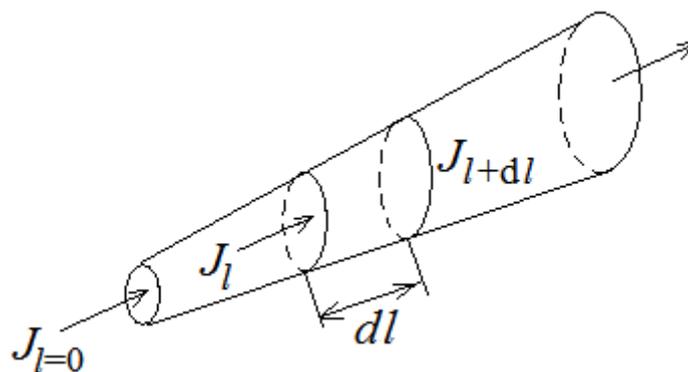


Рис. 29.1

Полагая, что при $l = 0$ $J_l = J_{l=0}$, после интегрирования получаем:

$$\int_{J_{l=0}}^{J_l} \frac{dJ_l}{J_l} = -\int_0^l \kappa_\lambda dl,$$

$$\ln \frac{J_l}{J_{l=0}} = -\int_0^l \kappa_\lambda dl,$$

откуда

$$J_l = J_{l=0} \exp\left(-\int_0^l \kappa_\lambda dl\right).$$

Согласно закону Стефана – Больцмана излучательная способность для отдельных полос излучения представится зависимостью

$$E_i = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} J_l d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} J_{l=0} \exp\left(-\int_0^l \kappa_\lambda dl\right) d\lambda.$$

Интенсивность излучения $J_{l=0}$ находим по закону Планка. Поглощательная способность определится по отношению лучистой энергии, поглощенной средой в слое толщиной l , к энергии излучения, падающей на этот слой $J_{l=0}$:

$$A_\lambda = \frac{J_{l=0} - J_l}{J_{l=0}} = 1 - \exp\left(-\int_0^l \kappa_\lambda dl\right).$$

Введем оптическую длину луча

$$L = -\int_0^l \kappa_\lambda dl.$$

Если коэффициент ослабления луча $\kappa_\lambda = \text{const}$, то $L = \kappa_\lambda l$. Здесь l – полная толщина газового слоя.

Тогда зависимость, выражающая ослабление интенсивности излучения в поглощающей среде, носит название закона Бугера и принимает вид

$$J_l = J_{l=0} \exp(-L).$$

Поглощательная способность газа в этом случае представится зависимостью

$$A_\lambda = 1 - e^{-L}.$$

Полная излучательная и поглощательная способности среды определяются суммой их значений для отдельных полос:

$$A_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n A_{\lambda i},$$

$$E_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n E_i.$$

Таким образом, для определения поглощательной и излучательной энергии среды необходимо располагать данными по спектрам поглощения и излучения, а также по коэффициентам ослабления луча для всех полос спектра, который в общем случае не является постоянной величиной. Он зависит от природы излучающей среды, длины волны и температуры. Вследствие этого коэффициенты ослабления луча оказываются весьма различными не только для отдельных полос спектра, но существенно изменяются в пределах одной и той же полосы.

Уравнение переноса лучистой энергии (закон Бугера) относится к поглощающей среде, переизлучение которой незначительно, распределение температуры по объему газа является равномерным.

Если кроме поглощения среда является излучающей, а рассеивание отсутствует, то уравнение переноса лучистой энергии получается из баланса тепла, в котором учитывается как поглощение энергии средой при прохождении излучения, так и собственное излучение среды, выражающееся через интенсивность излучения абсолютно черного тела. Тогда могут быть найдены интегральные значения для поглощательной способности и степени черноты газа:

$$A_{\Gamma} = \frac{1}{\sigma T_c^4} \int_0^{\infty} J_{0,c} A_{\lambda} d\lambda,$$

$$\varepsilon_{\Gamma} = \frac{1}{\sigma T_c^4} \int_0^{\infty} J_{0,\Gamma} A_{\lambda} d\lambda.$$

В первом интеграле падающий поток $J_{0,c}$ включает в себя лучистую энергию, излучаемую газом или другими стенками и прошедшую через газ. Таким образом, знания интегральных свойств газа достаточно для теоретического решения задачи теплообмена в объеме газа, заключенного в серую оболочку.

Приведенные зависимости можно распространить на случай изотермического газа с несерой оболочкой при условии, что ее оптические свойства мало изменяются от длины волны. Аналитические решения, базирующиеся на приведенных уравнениях переноса лучистой энергии, получены применительно к простым геометрическим системам: плоскопараллельный слой; газ в сферической оболочке.

Сложный теплообмен. Коэффициент теплоотдачи излучением

Сложный процесс теплообмена представляет собой совокупность одновременно протекающих процессов теплопроводности, конвективного переноса тепла и теплового излучения. Например, теплообмен через воздушные прослойки осуществляется как за счет теплопроводности, так и за счет лучистого переноса тепла. Также одновременный процесс переноса тепла за счет теплопроводности и излучения имеет место в среде, заполняющей поры в пористых теплоизоляционных материалах. В высокотемпературных теплообменных устройствах наряду с конвекцией приобретает большое влияние лучистый теплообмен. В общем случае указанные процессы оказывают взаимное влияние друг на друга, но рассчитать это влияние трудно.

Аналитические решения задач о совместном влиянии лучистого теплообмена и теплопроводности или конвекции базируются на совмещенных соответствующих уравнениях переноса энергии. Однако решения получены применительно к отдельным частным случаям, например, совместному действию излучения и вынужденной конвекции в цилиндрической трубе. Практически расчет теплообмена при совместном действии теплового излучения и теплопроводности или конвекции часто производится, соответственно, по методам эффективной теплопроводности или эффективной теплоотдачи. Эти методы состоят в замене коэффициентов теплопроводности и теплоотдачи некоторыми эффективными величинами, учитывающими лучистый перенос тепла:

$$\lambda_{\text{эф}} = \lambda + \lambda_{\text{рад}}$$

$$\alpha_{\text{эф}} = \alpha + \alpha_{\text{рад}}$$

Радиационный коэффициент теплопроводности определяется по величине плотности лучистого потока, которую по аналогии с законом Фурье можно представить в виде зависимости

$$E = -\lambda_{\text{рад}} \text{grad}T.$$

Радиационная составляющая коэффициента теплоотдачи также определяется по плотности лучистого потока, которую в этом случае представляют по аналогии с законом Ньютона – Рихмана:

$$E = -\alpha_{\text{рад}} \Delta T.$$

В обоих случаях процесс теплового излучения рассматривается как процесс теплообмена, сопутствующий теплопроводности и конвекции, которые приняты за основные процессы переноса. Если стенка омывается ка-

пельной жидкостью, то радиационные коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи равны нулю.

Если в качестве основного процесса теплообмена принимается тепловое излучение, то влияние теплопроводности и конвекции учитывается соответственным увеличением степени черноты. В этом случае поток тепла, переносимый за счет теплопроводности и конвекции, представляют по аналогии с законом Стефана – Больцмана:

$$q_k = c_0 \varepsilon_k \left[\left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right],$$

откуда находится конвективная составляющая приведенной степени черноты. Тогда приведенная степень черноты с учетом конвективного теплообмена представляется суммой:

$$\varepsilon_{\text{эф}} = \varepsilon + \varepsilon_k.$$

Контрольные вопросы

1. Укажите основные особенности излучения газов и паров.
2. Почему излучение углекислого газа и водяного пара отклоняется от закона Стефана – Больцмана? В чем это выражается?
3. Почему степень черноты трех- и более атомных газов зависит от толщины и давления слоя газа?
4. От какого давления зависит степень черноты углекислого газа – парциального или полного?
5. У какого из газов – двуокиси углерода или водяного пара – в целом степень черноты выше и почему?
6. Как зависит от толщины газового слоя соотношение между степенями черноты двуокиси углерода и водяного пара?
7. Какой закон выражает перенос лучистой энергии в поглощающей среде? Запишите его выражение.
8. Что называют оптической длиной луча?
9. Почему интенсивность излучения в поглощающей среде экспоненциально убывает?
10. Перечислите условия применимости закона Бугера.
11. Запишите выражение для результирующего потока излучения между поглощающим газом и его оболочкой. Почему оно имеет такую структуру?
12. Что называют сложным теплообменом? Перечислите основные методы решения задач сложного теплообмена. Поясните их особенности.

Лекция 30. Лучистый теплообмен между газом и оболочкой. Примеры практических задач

Лучистый теплообмен между газом и его оболочкой. Приближенный метод расчета степени черноты дымовых газов. Металлургические нагревательные печи. Определение коэффициента теплоотдачи излучением для нагревательной печи. Определение температуры стенки печи.

Лучистый теплообмен между газом и его оболочкой. Приближенный метод расчета степени черноты дымовых газов

Поглощающей средой являются трех- и более атомные газы. Степень черноты газа зависит от толщины слоя газа и его парциального давления, поэтому наиболее распространенным случаем поглощающих газов являются продукты сгорания органических топлив или дымовые газы. Рассмотрим один из приближенных методов расчета степени черноты дымовых газов, основанный на экспериментальных данных [20, 21].

Если газообразное тело находится в оболочке, обладающей свойствами серого тела, то часть энергии, излучаемой газом, поглощается этой оболочкой, а часть ее отражается. Отраженная оболочкой энергия частично поглощается газом, а частично вновь попадает на поверхность оболочки. Результирующий тепловой поток при теплообмене излучением между газом и оболочкой определится разностью между лучистым потоком, испускаемым газом на оболочку и частью излучения оболочки, которое поглощается газом:

$$Q_{г.с} = c_0 \varepsilon_{эф.с} \left[\varepsilon_{г} \left(\frac{T_{г}}{100} \right)^4 - A_{г} \left(\frac{T_{с}}{100} \right)^4 \right] F_{с}.$$

Здесь $\varepsilon_{эф.с} = 0,5(\varepsilon_{с} + 1)$ – эффективная степень черноты оболочки в поглощающей среде; $\varepsilon_{с}$ – степень черноты оболочки в диатермичной среде; $\varepsilon_{г} = \varepsilon_{CO_2} + \beta \varepsilon_{H_2O}$ – интегральное значение степени черноты газа (определяет-

ся при температуре газа $T_{г}$); $A_{г} = \varepsilon_{CO_2} \left(\frac{\bar{T}_{г}}{T_{с}} \right)^{0,65} + \beta \varepsilon_{H_2O}$ – интегральное значение

поглощательной способности газа (степени черноты углекислого газа и водяного пара определяются при температуре оболочки $T_{с}$).



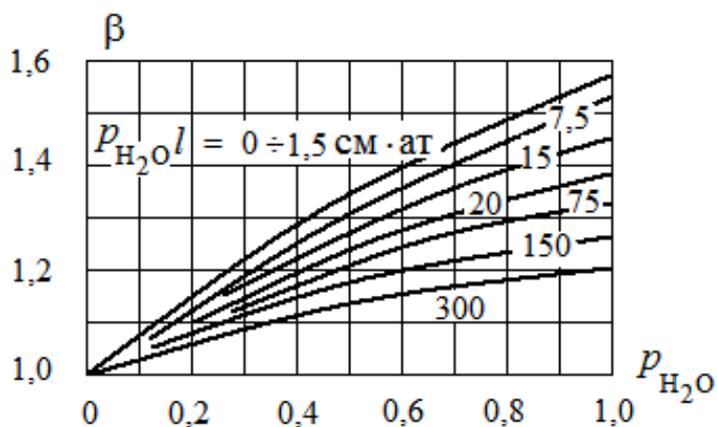


Рис. 30.1

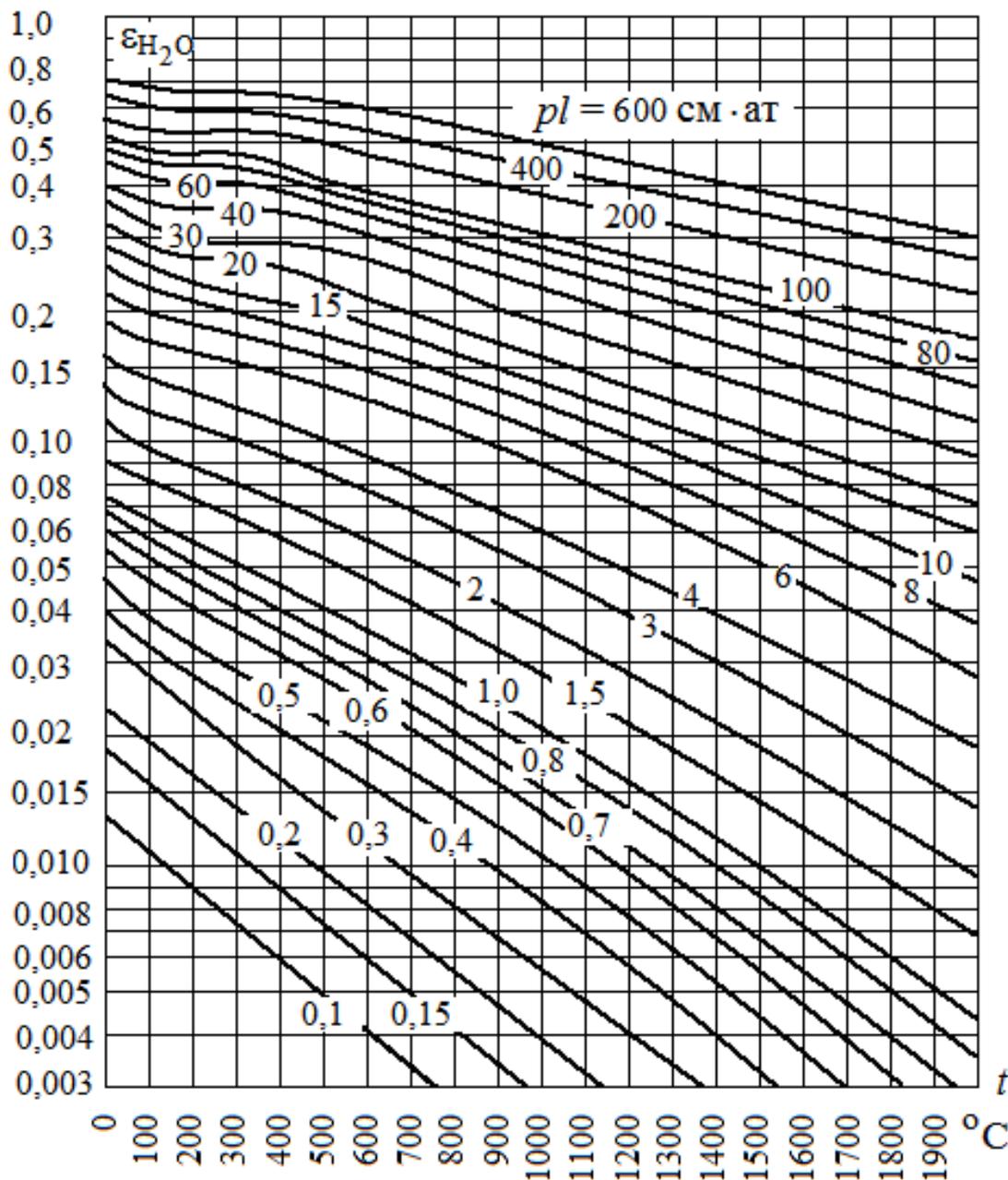


Рис. 30.2

Значения степеней черноты углекислого газа ϵ_{CO_2} и водяного пара $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$, а также параметра β приведены в виде номограмм по экспериментальным зависимостям (рис. 30.1, рис. 30.2, рис. 30.3). Для расчета средней длины пути луча пользуются приближенной формулой $l = 3,6V/F_c$, где V – объем газового тела, F_c – площадь оболочки.

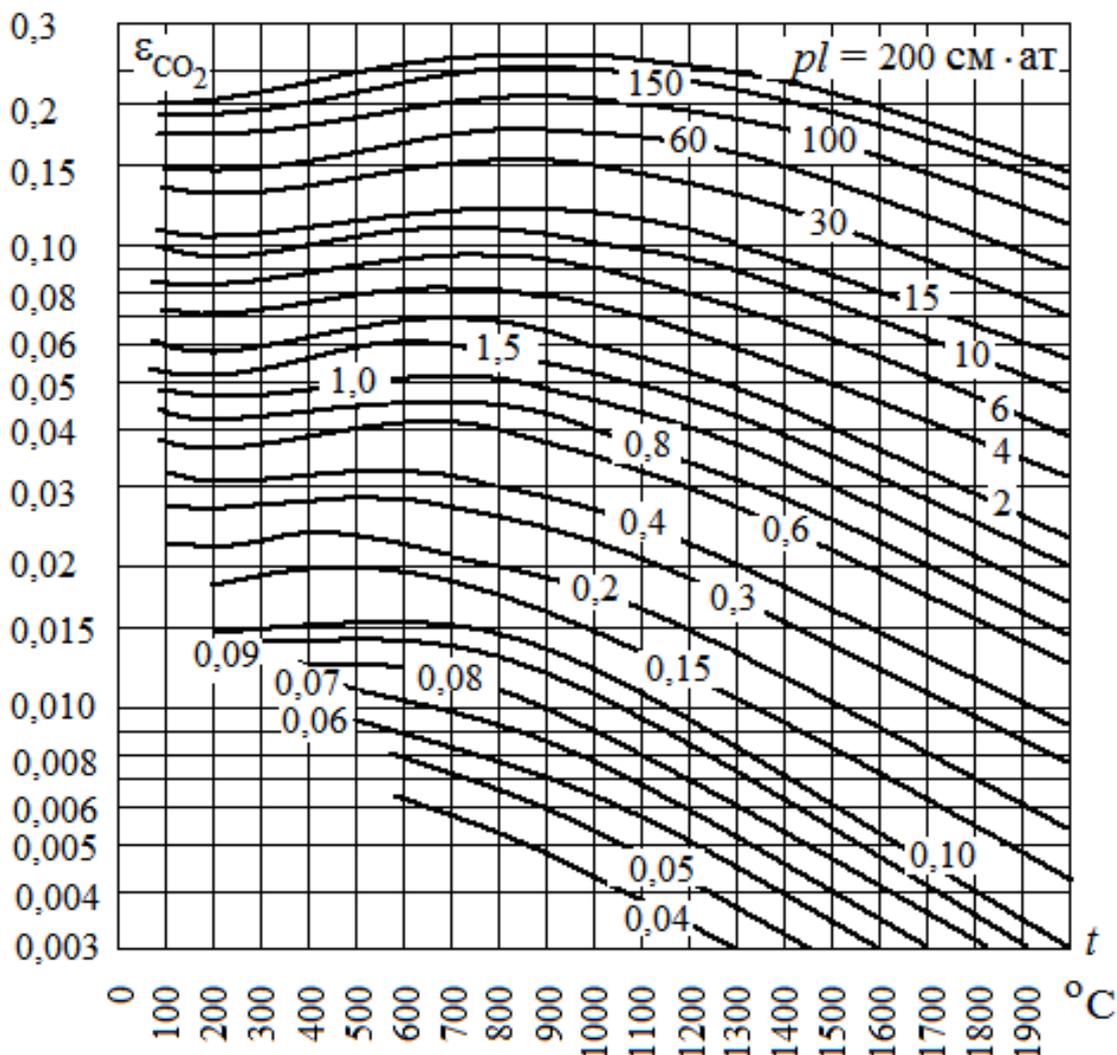


Рис. 30.3

Данный метод расчета лучистого теплообмена неприменим к газовым телам, содержащим в продуктах сгорания взвешенные твердые частицы несгоревшего топлива.

Металлургические нагревательные печи

Металлургические нагревательные печи служат для нагрева металла перед ковкой или прокаткой и для термической обработки проката [31]. Для отопления печи используется жидкое и газообразное топливо: мазут, природный газ и т. д. Для утилизации тепла уходящих дымовых газов печь оборудо-

вана рекуперативными теплообменными аппаратами. С их помощью воздух и газообразное топливо, подаваемые в горелки, подогреваются до требуемой температуры. В методических печах нагреваемый материал и газовая среда, как правило, взаимно перемещаются противотоком (навстречу друг другу). Прямоточную схему практически не применяют из-за больших потерь тепла с уходящими дымовыми газами (рис. 30.4).

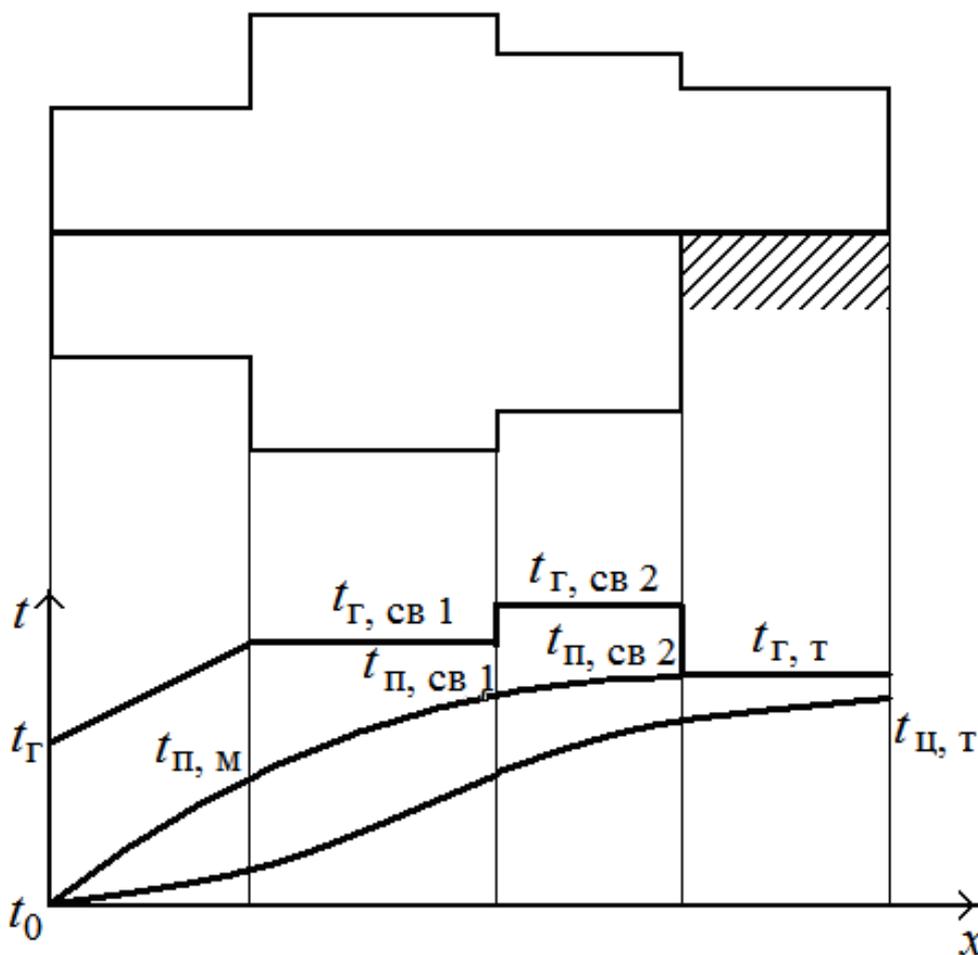


Рис. 30.4

По теплотехническим условиям методическая печь делится на три зоны: методическую зону, сварочную и томильную. Конструктивно зон может быть больше, это определяется особенностями нагрева заготовок. В методической зоне горелок нет, нагрев металла осуществляется теплом уходящих дымовых газов, температура которых уменьшается по длине зоны. Нагрев в сварочной и томильной зонах осуществляется при помощи длиннопламенных горелок, обеспечивающих постоянную по длине зоны температуру дымовых газов. Томильная зона, или зона сплошного пода, предназначена для выравнивания температуры так называемых «черных полос» – мест соприкосновения заготовок с водоохлаждаемыми трубами при двустороннем их нагреве в методической и сварочной зонах. В ней всегда осуществляется только односторонний нагрев заготовок. В некоторых печах томильная зона может отсутствовать, для этого прогреваемая толщина заготовок должна

быть $S \leq 0,12$ м. От режима нагрева (наличия методической зоны) печь получила свое название.

Рассмотрим наиболее распространённую конструкцию методической печи, включающую две сварочные зоны (схематическое изображение печи представлено на рис. 30.4). В рассматриваемой печи используется противоточная схема движения газа и металла, который перемещается по водоохлаждаемым глиссажным трубам. В методической и сварочных зонах осуществляется двусторонний нагрев заготовок прямоугольного поперечного сечения, выполненных из различных марок углеродистых сталей. Мощность горелок над и под изделиями – одинаковая.

По технологическим условиям температура нагреваемых изделий на выходе из методической печи должна быть не ниже 1200°C и не выше 1250°C . Обычно считают, что первая – это температура центра изделия, а вторая – его поверхности. Минимальная температура определяет пластическое состояние металла, при котором ещё возможны ковка или прокатка. Превышение максимальной температуры приводит к изменению структуры металла. В том и другом случае изделие бракуется, поэтому основной задачей при проектировании нагревательной печи является обеспечение правильного режима нагрева изделий. Кроме достижения требуемых конечных температур следует обеспечить плавный нагрев заготовок в процессе их движения в печи. Для того чтобы термические напряжения не разрушили металл из-за значительных температурных градиентов, его сначала медленно (методически) нагревают только теплом дымовых газов в методической зоне. Температура поверхности металла на выходе из методической зоны должна быть примерно равна $450\text{--}500^{\circ}\text{C}$, температура центра при этом примерно на $100\text{--}150^{\circ}\text{C}$ ниже. Затем в первой сварочной зоне поверхность металла нагревается до $950\text{--}1050^{\circ}\text{C}$, а во второй – до конечной температуры 1250°C . В томительной зоне происходит нагревание центра изделия до минимальной температуры пластичности – 1200°C .

Определение коэффициента теплоотдачи излучением для нагревательной печи

Необходимый для расчёта числа Био коэффициент теплоотдачи α рассчитываем на основе закона Ньютона – Рихмана. По определению коэффициент теплоотдачи равен отношению плотности теплового потока к разности температур между стенкой (поверхностью металла) и жидкой средой (дымовыми газами):

$$\alpha = \frac{q}{T_{\Gamma} - T_{\text{м}}} . \quad (30.1)$$

Собственное излучение газа и поверхности металла определяется на основе закона Стефана – Больцмана, а искомая плотность теплового потока определяется как результирующий поток между газом и металлом:

$$q = C_0 \cdot \varepsilon_{\text{пр}} \cdot \left(\frac{T_{\text{г}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{м}}}{100} \right)^4, \quad (30.2)$$

где $C_0 = 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Тогда на основании формул (30.1) и (30.2) коэффициент теплоотдачи излучением

$$\alpha = C_0 \cdot \varepsilon_{\text{пр}} \cdot \frac{\left(\frac{T_{\text{г}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{м}}}{100} \right)^4}{T_{\text{г}} - T_{\text{м}}}.$$

Приведённый коэффициент излучения в системе газ – кладка – металл определяется по формуле [31]

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_{\text{м}} \cdot \frac{\omega + 1 - \varepsilon_{\text{г}}}{\left[\varepsilon_{\text{м}} + \varepsilon_{\text{г}} \cdot (1 - \varepsilon_{\text{м}}) \right] \cdot \frac{1 - \varepsilon_{\text{г}}}{\varepsilon_{\text{г}}} + \omega},$$

где $\varepsilon_{\text{м}} = 0,8$ – степень черноты углеродистых и легированных конструкционных марок сталей; $\varepsilon_{\text{г}}$ – степень черноты продуктов сгорания; ω – степень развития кладки печи.

Степень черноты продуктов сгорания определяется по формуле

$$\varepsilon_{\text{г}} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \beta \cdot \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}.$$

Значения поправочного коэффициента β , степени черноты углекислого газа $\varepsilon_{\text{CO}_2}$ и водяных паров $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$, содержащихся в продуктах сгорания, находят по номограммам (см. [рис. 30.1](#), [рис. 30.2](#), [рис. 30.3](#)). Для этого необходимо рассчитать парциальное давление излучающих газов p_{CO_2} , $p_{\text{H}_2\text{O}}$ и параметр $p \cdot S_{\text{эф}}$, где $S_{\text{эф}}$ – эффективная длина пути луча. Затем по значению температуры среды (дымовых газов) или стенки (поверхность металла) и параметру $p \cdot S_{\text{эф}}$ определяют соответствующие значения степеней черноты излучающих газов.

Парциальное давление излучающих газов определяется по формулам:

$$p_{\text{CO}_2} = \frac{98,1 \cdot \text{CO}_2}{100},$$

$$p_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{98,1 \cdot \text{H}_2\text{O}}{100},$$

где CO_2 , H_2O – содержание углекислого газа и водяных паров в продуктах сгорания, %, рассчитывается для конкретного вида топлива (мазут, природный газ и т.д.).

Эффективная длина пути луча определяется по формуле

$$S_{\text{эф}} = \eta \cdot \frac{4 \cdot V}{F} = 0,9 \cdot 4 \cdot \frac{B \cdot h \cdot L}{2 \cdot (h+B) \cdot L} = 0,36 \cdot \frac{B \cdot h}{2 \cdot (h+B)},$$

где η – коэффициент, обычно принимаемый равным 0,9; V – объём, заполненный излучающим газом, м^3 ; F – площадь стенок, ограничивающих этот объём, м^2 ; B – ширина печи, м; h и L – высота и длина соответствующей зоны печи, м.

Степень развития кладки печи определяется по формуле

$$\omega = \frac{F_{\text{кл}}}{F_{\text{м}}} = \frac{(2h+B) \cdot L}{l \cdot L} = \frac{2h+B}{l},$$

где $F_{\text{кл}}$ – площадь кладки печи, м^2 ; $F_{\text{м}}$ – площадь поверхности металла, м^2 ; l – длина заготовки, м.

Если температура металла и (или) температура среды меняется по длине зоны, то коэффициент теплоотдачи определяется как среднегеометрический между его значением на входе и выходе из зоны:

$$\alpha_{\text{изл}} = \sqrt{\alpha_{\text{вх}} \cdot \alpha_{\text{вых}}},$$

тогда для методической зоны, где температура дымовых газов меняется по длине зоны, коэффициент теплоотдачи определяется по формуле

$$\alpha_{\text{изл}} = C_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{\text{пр}}^{\text{нач}} \cdot \varepsilon_{\text{пр}}^{\text{кон}} \cdot \frac{\left[\left(\frac{T_{\text{Г}}^{\text{нач}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{М}}^{\text{нач}}}{100} \right)^4 \right] \cdot \left[\left(\frac{T_{\text{Г}}^{\text{кон}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{М}}^{\text{кон}}}{100} \right)^4 \right]}{\left(T_{\text{Г}}^{\text{нач}} - T_{\text{М}}^{\text{нач}} \right) \cdot \left(T_{\text{Г}}^{\text{кон}} - T_{\text{М}}^{\text{кон}} \right)},$$

а для сварочных зон, где температура дымовых газов постоянная по длине зоны, коэффициент теплоотдачи определяется по формуле

$$\alpha_{\text{изл}} = C_0 \cdot \varepsilon_{\text{пр}} \cdot \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{T_{\Gamma}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{М}}^{\text{нач}}}{100} \right)^4 \right] \cdot \left[\left(\frac{T_{\Gamma}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{М}}^{\text{кон}}}{100} \right)^4 \right]}{(T_{\Gamma} - T_{\text{М}}^{\text{нач}}) \cdot (T_{\Gamma} - T_{\text{М}}^{\text{кон}})}}.$$

Определение температуры стенки печи

Для составления теплового баланса методической нагревательной печи необходимо найти потери тепла через кладку печи, а для этого нужно определить температуру внутренней поверхности печи [7, 31]:

$$T_{\text{кл}} = \sqrt[4]{T_{\text{М}}^4 + \frac{\omega + 1 - k}{k \cdot \frac{1 - \varepsilon_{\Gamma}}{\varepsilon_{\Gamma}}} \cdot (T_{\Gamma}^4 - T_{\text{М}}^4)},$$

где

$$k = \varepsilon_{\text{М}} + \varepsilon_{\Gamma} \cdot (1 - \varepsilon_{\text{М}}).$$

Контрольные вопросы

1. Поясните приближенный метод расчета степени черноты дымовых газов.
2. Какие излучающие газы, как правило, входят в состав дымовых газов?
3. Дайте определение методической нагревательной печи.
4. Перечислите зоны, на которые делится методическая печь, по тепло-техническим условиям.
5. Укажите диапазон допустимых значений температур поверхности металла и дымовых газов в различных зонах методической печи.
6. Изложите методику расчета коэффициента теплоотдачи излучением для нагревательной печи.
7. Дайте определение следующим понятиям: степень развития кладки печи, эффективная длина пути луча.
8. Запишите выражение для определения приведенного коэффициента излучения в системе газ – кладка – металл.
9. Как вычисляется коэффициент теплоотдачи излучением в нагревательной печи при значительном изменении температур среды и поверхности металла по длине зоны?
10. Запишите выражение для определения температуры стенки нагревательной печи.

МОДУЛЬ 5. МАССОТДАЧА

Лекция 31.

Тепло- и массообмен в двухкомпонентных средах. Основные положения тепло- и массообмена

Диффузия (массообмен) молекулярная и молярная. Концентрационная диффузия, закон Фика, коэффициент диффузии. Термодиффузия, бародиффузия. Дифференциальные уравнения тепло- и массообмена.

Диффузия (массообмен) молекулярная и молярная

Процессы массообмена происходят как в однокомпонентной, так и в многокомпонентной среде. В технических приложениях часто встречается случай двухкомпонентной среды. Смесь двух веществ называется бинарной. Обогащение воздуха кислородом, выделяемым листьями растений, рассматривается как процесс массообмена в бинарной смеси газов. Широко распространенные процессы испарения в паровоздушную среду и конденсация пара из смеси «пар-воздух» также относятся к случаю массообмена в бинарной смеси [8, 18, 25].

В природе и технике многие процессы (например, рассмотренные ранее испарение жидкости и конденсация пара) сопровождаются переносом массы одного компонента в другом. Компонентом называют химически индивидуальное вещество. Будем полагать, что компоненты не вступают в химические реакции друг с другом. Испарившаяся жидкость путем диффузии распространяется в парогазовом потоке; при этом меняется течение, изменяется интенсивности теплоотдачи, что в свою очередь сказывается на процессе диффузии.

Диффузия – самопроизвольный процесс установления внутри фаз равновесного распределения концентраций. В однородной по температурам и давлениям смеси процесс диффузии направлен к выравниванию концентраций в системе; при этом происходит перенос вещества из области с большей в область с меньшей концентрацией.

Аналогично теплообмену диффузия (массообмен) может происходить как молекулярным (микроскопическим), так и молярным (макроскопическим) путем. Диффузия осуществляется путем беспорядочного теплового движения, которое в жидкости имеет более сложный характер, чем в газе. Молекула колеблется около положения равновесия и скачкообразно может



переместиться в новое положение равновесия. Чем сложнее строение жидкости (больше число атомов в молекуле), тем сложнее этот процесс.

Будем рассматривать процессы тепло- и массопереноса в газообразных двухкомпонентных (бинарных) средах. Индексы 1 и 2 соответствуют компонентам.

Поток массы J – масса вещества, проходящая в единицу времени через данную поверхность в направлении нормали к ней.

Плотность потока массы j – поток массы, проходящий через единицу данной поверхности в направлении нормали к ней, вектор.

$$J = \int_F j dF,$$

при $j = \text{const}$

$$J = jS.$$

Местная концентрация $\rho_i = m_i / V$ – отношение массы i -го компонента к объему смеси.

Концентрационная диффузия, закон Фика, коэффициент диффузии. Термодиффузия, бародиффузия

Концентрационная диффузия. Закон Фика: в однородной по температуре и давлению макроскопически неподвижной двухкомпонентной смеси плотность потока массы одного из компонентов за счет молекулярной диффузии пропорциональна градиенту концентрации:

$$j_i^{\text{к.д}} = -D \frac{\partial \rho_i}{\partial n},$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии одного компонента относительно другого; n – направление нормали к поверхности одинаковой концентрации данного вещества.

Диффузия, описываемая законом Фика, называется концентрационной диффузией. Из кинетической теории газов следует, что коэффициент диффузии D возрастает с ростом температуры и уменьшением давления. Кроме того, он зависит от пропорций смеси (чем больше концентрация, тем больше зависимость), однако в технических расчетах ею пренебрегают. Вблизи критической точки нельзя пользоваться приближенными зависимостями.

Для смеси водяного пара и воздуха (влажный воздух) [18]

$$D = \frac{2,28 \cdot 10^{-10}}{p} \left(\frac{T}{273} \right)^{1,8}.$$

Так как концентрация имеет размерность плотности, то исходя из уравнения Менделеева – Клапейрона заменим плотность на давление, тогда

$$j_i^{к.д} = -D_{pi} \frac{\partial p_i}{\partial n},$$

где p_i – местное парциальное давление данного компонента; $D_{pi} = \frac{D}{R_i T}$;

c – коэффициент молекулярной диффузии, который различен для разных компонентов в отличие от D . Тогда

$$D = D_{p1} R_1 T = D_{p2} R_2 T,$$

откуда

$$\frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

где μ – молярная масса.

Термическая диффузия. Эффект Соре (термодиффузия) происходит при переменной температуре смеси. Из кинетической теории газов следует, что если массы двух компонентов различны, то за счет термодиффузии более тяжелые молекулы стремятся перейти в холодные области; если массы молекул примерно одинаковы, то более крупные переходят в холодные области. Иначе в ионизованном газе – более тяжелые молекулы переходят в более теплые области. Проявляется это при значительном градиенте температуры.

Из-за термической диффузии возникает градиент концентрации, стремящийся выровнять состав. С течением времени распределение концентрации становится стационарным. При неизотермической молекулярной диффузии плотность потока массы определяется выражением

$$j_i^{к.т.д} = -D \left(\nabla p_i + p \frac{k_T}{T} \nabla T \right).$$

Здесь $k_T = D_T / D$ – термодиффузионное отношение; D_T – коэффициент термодиффузии.

Термодиффузионное отношение k_T , как правило, меньше 0,1; не зависит от температуры; имеет существенное значение при больших градиентах температуры; в жидкостях меньше, чем в газах.

Обратный процесс: эффект Дюфо (диффузионный термоэффект) – возникновение разности температур в результате диффузионного перемешивания двух газов, первоначально находившихся при одной температуре. Например, при стационарном смешении водорода и азота возникает градиент температуры в несколько градусов. В жидкостях величина градиента температуры меньше чем в газах примерно на три порядка.

Бародиффузия возникает за счет градиента полного давления. Тяжелые молекулы стремятся перейти в область повышенного давления, легкие – наоборот. Бародиффузия тоже сопровождается переносом массы из-за разности концентраций:

$$j_1^{\text{б.д}} = -D \cdot \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu} \cdot \frac{1}{p} \nabla p,$$

где p – местное давление смеси, равное сумме парциальных давлений компонентов смеси p_1 и p_2 ; μ_1 и μ_2 – молярные массы компонентов;

$\mu = \mu_1 \frac{p_1}{p} + \mu_2 \frac{p_2}{p}$; ρ_1 , ρ_2 и ρ – плотности компонентов и смеси соответственно.

Бародиффузия проявляется при значительном градиенте давления, что в процессах теплообмена встречается редко, а также отсутствует при равенстве молярных масс компонентов.

Таким образом, суммарный перенос массы какого-либо компонента в неподвижной среде является следствием (суммированием) концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии и называется молекулярной диффузией:

$$j_{\text{м.д}} = j_{\text{к.д}} + j_{\text{т.д}} + j_{\text{б.д}}.$$

В движущейся среде вещество переносится не только молекулярной диффузией, но и конвекцией. При перемещении какого-либо объема смеси плотностью ρ со скоростью w происходит перенос массы смеси, удельная величина которого определяется уравнением

$$j_{\text{к}} = \rho w = (\rho_1 + \rho_2) w = \sum \rho_i w \tag{31.1}$$

или для определенного компонента смеси

$$j_{ki} = \rho_i w.$$

В результате совместного действия плотность потока вещества за счет молекулярного и конвективного переноса будет определяться уравнением

$$j_i = j_i^{M.D} + j_i^K.$$

Пусть количество массы смеси в единице объема неизменно, тогда утечка одного компонента равна притоку другого $j_1 = -j_2$. Вместе с массой вещества переносится энтальпия $j_i i_i$ (i_i – удельная энтальпия i -го компонента, Дж/кг). В общем случае через неподвижную контрольную поверхность, выделенную в смеси, переносится энтальпия $\sum j_i i_i$, причем если нет потока массы, то есть поток энтальпии, так как разные вещества имеют разные удельные энтальпии.

Для бинарной смеси

$$j_1 i_1 + j_2 i_2 = j_1 (i_1 - i_2) = j_1 (c_{p1} - c_{p2}) T.$$

Диффузионный перенос тепла отсутствует, если $c_{p1} = c_{p2}$. Тогда тепло переносится как за счет теплопроводности и конвекции, так и за счет диффузионного переноса массы:

$$q = -\lambda \nabla t + \rho w i + \sum j_i^{M.D} i_i. \quad (31.2)$$

Дифференциальные уравнения тепло- и массообмена

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + D \frac{(c_{p1} - c_{p2})}{c_p} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial m_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial m_1}{\partial z} \right) \right\}.$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:



$$\operatorname{div} \vec{w} = 0.$$

Уравнение движения (система уравнений Навье – Стокса):

$$\rho \frac{Dw_x}{D\tau} = \rho \cdot g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \cdot \nabla^2 w_x;$$

$$\rho \frac{Dw_y}{D\tau} = \rho \cdot g_y - \frac{dp}{dy} + \mu \cdot \nabla^2 w_y;$$

$$\rho \frac{Dw_z}{D\tau} = \rho \cdot g_z - \frac{dp}{dz} + \mu \cdot \nabla^2 w_z.$$

Уравнение массообмена:

$$\frac{Dm_i}{D\tau} = D \nabla^2 m_i.$$

Для неподвижной жидкости ($w_x = w_y = w_z = 0$) уравнение массообмена принимает вид

$$\frac{dm_i}{d\tau} = D \nabla^2 m_i.$$

В последнем уравнении, называемом уравнением Фика, учтен перенос массы только путем концентрационной диффузии. Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла. Если для температуры и массосодержания ввести одинаковые обозначения, то уравнения по своему внешнему виду не будут отличаться друг от друга. Сравнивая, можно видеть, что коэффициент диффузии аналогичен коэффициенту температуропроводности.

Очевидно, если условия однозначности аналогичны, то все решения дифференциального уравнения теплопроводности как для стационарного, так и для нестационарного процессов могут быть использованы для расчета концентрационной диффузии. В случае $D = a$ поля концентрации и температуры подобны.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение следующих понятий: диффузия, концентрационная диффузия, молярная диффузия, молекулярная диффузия.
2. Какие явления называются эффект Дюфо и эффект Соре?
3. Укажите название закона, определяющего концентрационную диффузию, и запишите его математическое выражение.
4. Дайте определение и запишите единицы измерения следующих физических величин: поток массы, плотность потока массы, местная концентрация, коэффициент молекулярной диффузии, коэффициент термодиффузии, термодиффузионное отношение.
5. Дайте определение физических процессов: термодиффузия и бародиффузия.
6. Вследствие какого эффекта более тяжелые молекулы стремятся перейти в холодные области, если массы двух компонентов различны; а более крупные переходят в холодные области, если массы молекул примерно одинаковы?
7. Вследствие какого эффекта тяжелые молекулы стремятся перейти в область повышенного давления, а легкие – наоборот?
8. За счет чего возникает бародиффузия?
9. В каком случае возникает термодиффузия?
10. Как изменяется поток массы и поток теплоты бинарной смеси при наличии диффузионного переноса массы?
11. Запишите уравнение энергии для бинарной смеси диффундирующих друг в друга компонентов.
12. Запишите уравнение массообмена в движущейся бинарной смеси.
13. Запишите уравнение движения для бинарной смеси.
14. Запишите уравнение неразрывности.
15. Сформулируйте закон Фика и запишите его математическое выражение.

Лекция 32. Тепло- и массоотдача в двухкомпонентных средах

Тепло- и массоотдача. Коэффициент массоотдачи. Стефанов поток. Уравнение конвективной тепло- и массоотдачи. Уравнение теплового и диффузионного пограничного слоев.

Тепло- и массоотдача. Коэффициент массоотдачи

В движущейся однокомпонентной среде тепло переносится теплопроводностью и конвекцией. Этот процесс называется конвективным теплообменом. По аналогии процесс совместного молекулярного и молярного переноса вещества в движущейся многокомпонентной среде называют конвективным массообменом. При наличии массообмена процесс конвективного теплообмена усложняется. Перенос тепла дополнительно осуществляется за счет диффузии.

Практический интерес представляют процессы теплообмена и массообмена при испарении, сублимации (возгонке), конденсации, сорбции, десорбции и др. В этом случае система тел является гетерогенной. Под гетерогенной системой обычно понимают неоднородную систему, состоящую из однородных частей, разделенных поверхностями раздела. Однородные части гетерогенной системы должны иметь размеры, достаточно большие по сравнению с молекулами или средним расстоянием между ними. При этом микроскопическая неоднородность не принимается во внимание. Поверхность жидкой (или твердой) фазы в этом случае играет роль, аналогичную роли твердой стенки в процессах теплоотдачи без сопутствующей диффузии. Например, при испарении жидкости образующийся пар переносится путем диффузии в окружающую парогазовую смесь и одновременно имеет место теплопередача между парогазовой смесью и поверхностью жидкости.

Аналогично теплоотдаче конвективный массообмен между жидкостью или твердой поверхностью и окружающей средой называют массоотдачей.

В рассматриваемых случаях тепло- и массоотдача идут одновременно. Для практических расчетов теплоотдачи используют закон Ньютона-Рихмана

$$q = \alpha \cdot (t_c - t_{ж}).$$

Для практических расчетов массоотдачи используют уравнение

$$j = \beta \cdot (\rho_c - \rho_0), \tag{32.1}$$

где β – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций диффундирующего вещества; ρ_c – концентрация диффундирующего вещества на жидкой (твердой) поверхности раздела фаз; ρ_0 – концентрация диффундирующего вещества вдали от жидкой (твердой) поверхности раздела фаз.

Используя уравнение состояния идеального газа, уравнение (32.1) можно записать в следующем виде:

$$j = \beta_p \cdot (p_c - p_0) . \quad (32.2)$$

Здесь β_p – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциальных давлений $\Delta p = p_c - p_0$, где p_c – парциальное давление диффундирующего вещества на жидкой (твердой) поверхности; p_0 – парциальное давление этого же компонента вдали от поверхности раздела фаз. Это уравнение впервые было получено Э.Дальтоном (1788 г.)

Из уравнения (32.2) следует, что

$$\beta_p \equiv \frac{dJ}{(p_c - p_0) \cdot dF} = \frac{j}{p_c - p_0} .$$

Тождество следует рассматривать как определение коэффициента массоотдачи, отнесенного к разности парциальных давлений.

Коэффициенты β и β_p связаны соотношением

$$\beta_p = \beta / RT .$$

Стефанов поток

Рассмотрим процесс испарения жидкости в парогазовую среду. Будем полагать, что полное давление по всему объему парогазовой смеси неизменно, а температурные разности пренебрежимо малы. В этом случае можно не учитывать термо- и бародиффузию.

Парциальное давление пара изменяется от значения $p_{п.с}$ на поверхности испаряющейся жидкости до значения $p_{п0}$ вдали от поверхности раздела (рис. 32.1). Парциальное давление газа $p_c = p - p_{п}$ также должно изменяться в соответствии с изменением парциального давления пара. При $p = \text{const}$ градиенты парциального давления и газа будут равны по абсолютной величине и противоположно направлены:

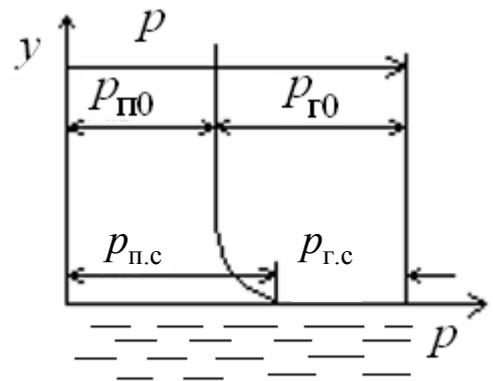


Рис. 32.1

$$\frac{\partial p_{\Gamma}}{\partial y} = -\frac{\partial p_{\Pi}}{\partial y}. \quad (32.3)$$

Следовательно, газ должен диффундировать в направлении, противоположном направлению диффузирования пара. Пар может свободно диффундировать в парогазовую среду. Для газа же поверхность жидкости является непроницаемой преградой. Вследствие этого количество газа у поверхности жидкости должно непрерывно увеличиваться. В случае стационарного режима должно иметь место постоянство во времени распределения парциальных давлений пара и газа. Поэтому перемещение газа к поверхности испарения должно компенсироваться конвективным потоком парогазовой смеси, направленным от жидкости в парогазовую среду. Этот поток называют стефановым потоком. Его скорость обозначим $w_{c,\Pi}$.

Суммарный поток пара будет равен сумме молекулярного и конвективного потоков:

$$j_{\Pi,c} = -D_{p\Pi} \left(\frac{\partial P_{\Pi}}{\partial y} \right)_c + \rho_{\Pi} \cdot w_{c,\Pi}. \quad (32.4)$$

Суммарный поток газа у поверхности жидкости равен нулю:

$$j_{\Gamma,c} = -D_{p\Gamma} \left(\frac{\partial P_{\Gamma}}{\partial y} \right)_c + \rho_{\Gamma} \cdot w_{c,\Pi} = 0. \quad (32.5)$$

Из уравнения (32.5) с учетом (32.3) и $\frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ получим:

$$w_{c,\Pi} = -\frac{D_{p\Pi}}{\rho_{\Gamma}} \cdot \frac{R_{\Pi}}{R_{\Gamma}} \cdot \left(\frac{\partial P_{\Pi}}{\partial y} \right)_c.$$

Подставив полученное значение $w_{c,\Pi}$ в уравнение (32.4), получим:

$$j_{\Pi,c} = -D_{p\Pi} \left(\frac{P_{\Pi} + P_{\Gamma}}{P_{\Gamma}} \right)_c \cdot \left(\frac{\partial P_{\Pi}}{\partial y} \right)_c = -D_{p\Pi} \left(\frac{P}{P_{\Gamma}} \right)_c \cdot \left(\frac{\partial P_{\Pi}}{\partial y} \right)_c \quad (32.6)$$

Это уравнение впервые было получено Стефаном. Оно отличается от закона диффузии $j_i^{к.д} = -D_{p_i} \frac{\partial P_i}{\partial n}$, относящегося к условиям беспрепятственного распространения обоих компонентов смеси, дополнительным множителем

лем p/p_r . Этот множитель учитывает конвективный (стефанов) поток, вызванный непроницаемостью поверхности испарения для газа. Как следует из изложенного, стефанов конвективный поток появляется и при отсутствии вынужденной или свободной тепловой конвекции.

Уравнение конвективной тепло- и массоотдачи

Поток массы на поверхности испарения определяется с помощью уравнения (32.5). Этот же поток может быть определен уравнением (32.6), в котором градиент парциального давления пара и парциальное давление газа берутся на поверхности жидкости. Приравняем правые части и получим:

$$\beta_p(p_{п.с} - p_{п0}) = -D_{pп} \left(\frac{p}{p_r} \right)_c \cdot \left(\frac{\partial p_{п}}{\partial y} \right)_c,$$

или

$$\beta_p = -D_{pп} \frac{(p/p_r)_c}{p_{п.с} - p_{п0}} \cdot \left(\frac{\partial p_{п}}{\partial y} \right)_c. \quad (32.7)$$

Уравнение (32.7) по аналогии с уравнением $\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_c} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{n=0}$ можно назвать дифференциальным уравнением массоотдачи.

Рассмотренный процесс испарения жидкости в парогазовую смесь соответствует условиям полупроницаемой поверхности, т.е. поверхности, проницаемой для одного (активного) компонента смеси (пара) и непроницаемой для другого (инертного) компонента (газа). Полупроницаемая поверхность наблюдается при конденсации пара из парогазовой смеси.

В случае полностью проницаемой поверхности через нее проходят оба компонента. Последнее, например, имеет место при некоторых химических реакциях на поверхности тела. Поверхность является полностью проницаемой и при конденсации обоих компонентов бинарной паровой смеси. Такой же эффект может иметь место и при испарении некоторых растворов.

При наличии массообмена непосредственно на границе раздела фаз имеется нормальная составляющая скорости испаряющегося или конденсирующегося компонента (пара) $w_{y,п.с} = \frac{j_{п.с}}{\rho_{п.с}}$.

Эта скорость является условной величиной, она вызвана молекулярной диффузией и стефановым потоком непосредственно в пристеночном слое.

Общее количество тепла q , отдаваемого или воспринимаемого жидкостью и парогазовой смесью, равно сумме тепла q_α , переданного конвективным теплообменом, и тепла q_β , переносимого диффундирующей массой в виде энтальпии.

При полупроницаемой поверхности в условиях стационарного процесса стефанов поток компенсирует встречный молекулярный поток газа и реально возникает лишь поперечный поток пара. В этом случае

$$q_c = q_\alpha + q_\beta = -\lambda(\nabla t)_c + j_{п.с} \cdot i_{п.с}$$

Общее количество тепла q_c может распределяться между q_α и q_β по-разному.

По определению $\alpha \equiv \frac{q_\alpha}{t_c - t_{ж}} = -\frac{\lambda}{t_c - t_{ж}} \cdot (\nabla t)_c$, здесь то же, но тем не ме-

нее наличие поперечного потока массы $j_{п}$ приводит к тому, что величина коэффициента теплоотдачи α может быть иной, чем при теплоотдаче без массообмена.

Из ряда теоретических работ следуют выводы: поток вещества направленный перпендикулярно поверхности от поверхности (испарение, сублимация, десорбция, вдувание газа через пористую стенку) приводит к увеличению толщины пограничного слоя, при этом $\text{grad } w_x$ (вдоль поверхности) уменьшается, отсюда коэффициент теплоотдачи уменьшается. В противоположном случае, когда поток вещества направлен перпендикулярно поверхности к поверхности (конденсация, сорбция, отсос газа), величина пограничного слоя уменьшается, $\text{grad } w_x$ увеличивается и коэффициент теплоотдачи увеличивается.

Тепловой и диффузионный пограничные слои

При омывании поверхности испарения движущейся парогазовой смесью около испаряющейся поверхности помимо газодинамического и температурного пограничных слоев образуется диффузионный пограничный слой (рис. 32.2). В пределах диффузионного пограничного слоя парциальное давление пара изменяется от $p_{п.с}$ на поверхности испарения до $p_{п0}$ на внешней границе пограничного слоя.

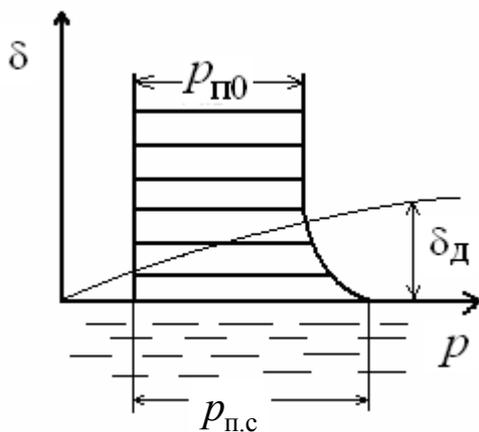


Рис. 32.2

Внутри пограничного слоя справедливо условие $\frac{\partial p_{\Gamma}}{\partial y} \neq 0$; вне пограничного слоя и на его внешней границе выполняются условия:

$$\frac{\partial p_{\Pi}}{\partial y} = 0 \text{ и } p_{\Pi} = p_{\Pi 0}$$

Таким образом, все изменения парциального давления пара сосредотачиваются в сравнительно тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности испаряющегося тела.

Диффузионный пограничный слой образуется и в процессах сублимации, при конденсации пара из парогазовой смеси в процессах сорбции и др.

Как показывают теоретические расчеты пограничного слоя, коэффициенты массоотдачи качественно зависят от направления и величины поперечного потока массы так же, как и коэффициенты теплоотдачи.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятий конвективный массообмен, массоотдача.
2. Перечислите процессы при которых одновременно происходит тепло- и массообмен.
3. Дайте определение и запишите единицы измерения коэффициентов массоотдачи, отнесенного к разности концентраций диффундирующего вещества и к разности парциальных давлений.
4. Какое явление называют «Стефанов поток»?
5. Запишите уравнение Стефана. Чем оно отличается от закона Фика?
6. Запишите уравнение массоотдачи. Каким уравнениям оно аналогично?
7. Дайте определение диффузионного пограничного слоя.
8. В каком случае тепловой, гидродинамический и диффузионный пограничные слои будут иметь одинаковую толщину?

Лекция 33. Тройная аналогия

Аналогия переноса импульса, энергии и массы компонента (тройная аналогия). Расчет массоотдачи в случае ламинарного пограничного слоя при вынужденном движении. Расчет массоотдачи при турбулентном течении жидкости на основе уравнений теплоотдачи.

Аналогия переноса импульса, энергии и массы компонента (тройная аналогия)

Процессы переноса тепла и массы, обусловленные микроскопическими механизмами, могут протекать в любой материальной среде, как в жидкости или в газе, так и в твердых телах. Однако в первом случае эти процессы, как правило, сопровождаются конвективным переносом. В твердых непрозрачных телах единственным механизмом переноса тепла является теплопроводность, а переноса массы – диффузия. Заметим, что термин молекулярная теплопроводность (диффузия) является условным, так как материальными носителями могут являться не только молекулы, но и атомы, ионы, а в случае теплопроводности – свободные электроны (в металлах) [25].

Однако независимо от вида носителя, т.е. от механизма переноса, можно дать единое описание всем этим процессам.

Логично предположить, что процесс переноса тепла теплопроводностью происходит тем интенсивнее, чем резче изменяется температура, т. е. чем больше градиент температуры. На этом предположении основан закон Фурье, который удовлетворительно, как показывают эксперименты, описывает различные процессы теплопроводности:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T. \quad (33.1)$$

В соответствии с этим законом вектор плотности теплового потока \vec{q} пропорционален по модулю градиенту температуры и направлен в сторону убывания температуры. Коэффициент пропорциональности λ называется коэффициентом теплопроводности. Он является физическим параметром вещества, характеризует его способность проводить тепло и зависит от температуры, а для газов также и от давления.

Если ввести обозначение $a = \lambda / \rho c_p$, где ρ – плотность, кг/м³; c_p – изобарная теплоемкость вещества, Дж/кг·К, и считать, что плотность и теплоемкость – постоянные величины, то выражение закона Фурье можно представить в виде

$$\vec{q} = -a \operatorname{grad} i, \quad (33.2)$$

где $i = \rho c_p T$ – объемная энтальпия, Дж/м³, т.е. количество тепла, содержащееся в единице объема вещества с температурой T . В такой формулировке закон Фурье означает, что плотность теплового потока пропорциональна градиенту объемной энтальпии. Коэффициент пропорциональности a носит название коэффициента температуропроводности и является характеристикой интенсивности молекулярного переноса тепла. Величины, являющиеся, подобно коэффициентам кинематической вязкости и температуропроводности, характеристиками переноса, часто называют коэффициентами переноса. Но если кинематическая вязкость ν является коэффициентом переноса количества движения, то температуропроводность представляет собой коэффициент переноса тепла.

Для процесса молекулярной диффузии аналогом закона Фурье является закон Фика, определяющий диффузионный поток массы i -го компонента смеси (если пренебречь термодиффузией):

$$j_i = -D \cdot \operatorname{grad} \rho_i. \quad (33.3)$$

Отметим, что закон Фика полностью аналогичен закону Фурье в форме (33.2). Действительно, как следует из выражения (33.3), плотность диффузионного потока массы пропорциональна по модулю объемной плотности массосодержания (т.е. парциальной плотности), а направление этого потока противоположно направлению градиента парциальной плотности. Коэффициент диффузии D измеряется в тех же единицах (м²/с) и имеет тот же смысл, что и коэффициент температуропроводности a (а также кинематической вязкости ν), т. е. он характеризует интенсивность процесса молекулярной диффузии и является поэтому коэффициентом молекулярного переноса массы.

Если плотность смеси ρ величина постоянная (что возможно, например, для бинарной смеси при малых концентрациях примеси либо при близости молекулярных масс примеси и основного вещества), учитывая, что парциальная плотность ρ_i выражается через концентрацию (массовую долю) i -го компонента как $\rho_i = \rho C_i$, получим закон Фика в виде

$$j_i = -\rho D \operatorname{grad} C_i. \quad (33.4)$$

Эта формулировка закона Фика аналогична закону Фурье в форме (33.1).

Коэффициент диффузии зависит от природы веществ, составляющих смесь, температуры и давления (для газов); слабой зависимостью коэффициента диффузии от концентраций компонентов смеси в инженерных расчетах, как правило, пренебрегают.

Познакомившись с тремя видами процессов молекулярного переноса: с переносом импульса (т.е. трение в ламинарном потоке), переносом тепла (теплопроводностью) и переносом массы примеси (диффузией), нетрудно заметить аналогию между этими процессами.

Действительно, формулу Ньютона для вязкого трения в плоскопараллельном ламинарном потоке, законы Фурье и Фика для одномерных процессов теплопроводности и диффузии в случае постоянных плотности и теплоемкости среды можно записать соответственно следующим образом:

$$\tau = \nu \frac{\partial(\rho u)}{\partial y}; \quad (33.5)$$

$$q = -a \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial y}; \quad (33.6)$$

$$j_i = -D \frac{\partial \rho_i}{\partial y}, \quad (33.7)$$

где y – координата, в направлении которой происходит перенос импульса, тепла и вещества. Как видно из выражений (33.5), (33.6), (33.7), плотность потока каждой из субстанций, т. е. импульса τ , тепла q и вещества j_i , пропорциональна градиенту, объемной плотности, соответственно, импульса (ρu), энтальпии ($\rho c_p T$) и вещества (ρ_i).

Таким образом, закономерности всех трех процессов переноса могут быть обобщены и сформулированы следующим образом: поток субстанции пропорционален движущей силе, а коэффициентом пропорциональности является коэффициент переноса. Движущей силой в каждом случае является градиент объемной плотности соответствующей субстанции. В этой формулировке отражено существо известного в термодинамике необратимых процессов принципа линейности Онзагера, являющегося одним из общих принципов переноса.

Аналогия процессов молекулярного переноса импульса, тепла и массы при определенных условиях приводит к тождественности соответствующих дифференциальных уравнений и позволяет создать общую теорию процессов переноса. В дальнейшем будет показано, что и между процессами турбулентного переноса импульса, тепла и массы также существует достаточно глубокая аналогия.

Необходимо отметить, что процессы переноса тепла и массы аналогичны только при отсутствии вторичных эффектов, обусловленных их взаимным влиянием, т.е. термодиффузии и диффузионного переноса тепла. Практически это означает, что для получения указанной аналогии роль вторичных эффектов тепло- и массообмена должна быть невелика.

Расчет массоотдачи в случае ламинарного пограничного слоя при вынужденном движении

Рассчитаем процесс массоотдачи при ламинарном движении жидкости вдоль плоской поверхности с помощью уравнения потока массы для пограничного слоя. При этом, однако, необходимо предположить, что интенсивность массоотдачи настолько невелика, что поперечная компонента скорости на поверхности близка к нулю.

Полагая, что толщина диффузионного пограничного слоя не превышает толщины гидродинамического, получим:

$$\delta_c / \delta = 1 / \sqrt[3]{Sc}, \quad (33.8)$$

что соответствует предположению о зависимости соотношения толщин диффузионного и гидродинамического пограничных слоев от критерия Шмидта.

Подставим в выражение (33.8) формулу для толщины гидродинамического пограничного слоя, найдем закон изменения толщины диффузионного пограничного слоя по длине пластины:

$$\delta_c = 4,64x Re_x^{-0,5} Sc^{-1/3}. \quad (33.9)$$

Используя формулу, полученную из дифференциального уравнения конвективной массоотдачи, найдем связь между коэффициентом массоотдачи и толщиной диффузионного пограничного слоя:

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{D}{\delta_c}. \quad (33.10)$$

Таким образом, коэффициент массоотдачи также обратно пропорционален толщине диффузионного пограничного слоя, что обусловлено возрастанием сопротивления поперечному переносу массы по мере увеличения толщины пограничного слоя.

Формулы (33.9) и (33.10) позволяют определить, как изменяется коэффициент массоотдачи по длине пластины:

$$\beta = 0,332 \frac{D}{x} \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Sc}. \quad (33.11)$$

Уменьшение β по мере удаления от передней кромки пластины так же, как и в случае теплоотдачи, обусловлено нарастанием толщины диффузионного пограничного слоя.

Разделив обе части выражения (33.11) на D и умножив на x , получим в левой части безразмерную величину $\beta x / D = Sh$, аналогичную числу Нуссельта, представляющую собой безразмерный коэффициент массоотдачи и называе-

мую числом Шервуда. В результате формула (33.11) приобретает следующий вид:

$$Sh = 0,332 Re_x^{0,5} Sc^{1/3},$$

где все величины являются безразмерными.

Принципиальный характер полученных результатов имеет не частное, а всеобщее значение. Во всех случаях конвективная теплоотдача при вынужденном движении описывается зависимостями вида $Nu=Nu(Re,Pr)$, а конвективная массоотдача – зависимостями вида $Sh=Sh(Re,Sc)$.

Более того, оказывается, что во всех случаях вынужденной конвекции при ламинарном режиме и при отсутствии отрыва потока от стенки критерий Рейнольдса входит в формулы для тепло- и массоотдачи в степени 0,5, как и в том простом частном случае, который был рассмотрен с помощью аналитического метода.

Расчет массоотдачи при турбулентном течении жидкости на основе уравнений теплоотдачи

При рассмотрении процесса массоотдачи, происходящего в турбулентном пограничном слое, можно воспользоваться двухслойной схемой этого течения, в соответствии с которой турбулентный пограничный слой состоит из двух зон: собственно турбулентной зоны и вязкого или ламинарного подслоя, прилегающего к поверхности тела.

Ранее рассматривался процесс теплоотдачи в ламинарном пограничном слое. Воспользовавшись тройной аналогией, которая при определенных условиях приводит к тождественности соответствующих дифференциальных уравнений процессов теплоотдачи и массоотдачи, можно получить уже знакомые формулировки и закономерности для массоотдачи при турбулентном течении жидкости.

Таким образом, формулы массоотдачи для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине будут иметь следующий вид:

$$Sh_{жx} = 0,0296 \cdot Re_{жx}^{0,8} \cdot Sc_{ж}^{0,43}$$

и

$$Sh_{жl} = 0,037 \cdot Re_{жl}^{0,8} \cdot Sc_{ж}^{0,43}.$$

В общем случае турбулентного движения формулы для массоотдачи при вынужденном движении имеют вид $Sh=f(Re,Sc)$.

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения Ньютона, Фурье и Фика.
2. Перечислите условия, при которых процессы теплоотдачи и массоотдачи будут аналогичными.
3. Сформулируйте принцип Онзагера.
4. Запишите выражение для соотношения толщин диффузионного и гидродинамического пограничного слоев.
5. Запишите выражение для соотношения толщин теплового и гидродинамического пограничного слоев.
6. В каком случае толщины диффузионного, теплового и гидродинамического пограничных слоев будут одинаковыми?
7. Запишите критериальное уравнение для расчета массоотдачи в случае ламинарного пограничного слоя при вынужденном движении.
8. Запишите критериальное уравнение для расчета массоотдачи в случае турбулентного пограничного слоя при вынужденном движении.

Лекция 34.

Тепло- и массоотдача при испарении жидкости в парогазовую среду. Испарение воды в воздух

Влажный воздух. Давление насыщенного пара. Состояния и основные характеристики влажного воздуха. Испарение воды. Температура мокрого термометра.

Влажный воздух. Давление насыщенного пара

Влажный воздух представляет собой механическую смесь сухого воздуха и паров воды. Процессы с влажным воздухом рассчитывают по уравнениям состояния идеальных газов (вследствие малых парциальных давлений пары воды считают идеальным газом) в условиях термодинамического равновесия (температура паров воды, сухого воздуха, влажного воздуха принимается одинаковой) [8].

Уравнение состояния сухого воздуха:

$$p_v = \rho_v R_v T = \rho_v 8314 T / \mu_v .$$

Уравнение состояния паров воды:



$$p_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} R_{\text{п}} T = \rho_{\text{п}} 8314 T / \mu_{\text{п}} .$$

Здесь

$$\rho_{\text{в}} = \frac{m_{\text{в}}}{V} ; \rho_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{V} ,$$

где $m_{\text{п}}$, $m_{\text{в}}$ – масса паров воды и сухого воздуха; V – объем влажного воздуха.

Давление влажного воздуха p есть сумма парциальных давлений сухого воздуха $p_{\text{в}}$ и паров воды $p_{\text{п}}$. Парциальное давление паров воды является важной характеристикой влажного воздуха, так как состояние влажного воздуха определяется соотношением парциального давления паров воды $p_{\text{п}}$ и давлением насыщенных паров воды p_s при температуре влажного воздуха. Давление насыщенных паров жидкости p_s определяется по уравнению Клапейрона – Клаузиуса. Состояние насыщения (кипения жидкости) наступает, если при данной температуре давление насыщенных паров p_s равно давлению окружающей среды p . В неограниченном объеме $p = p_{\text{в}}$, в замкнутом объеме $p = p_{\text{в}} + p_{\text{п}}$.

Давление насыщенных паров воды в интервале 20...100°С можно определить по эмпирической зависимости

$$\lg p_s = 5,9778 - \frac{2224,4}{T} \text{бар} . \quad (34.1)$$

В [табл. 34.1](#) дано сопоставление значений p_s , рассчитанных по уравнению (34.1) и взятых по таблицам водяного пара.

Таблица 34.1

$t, ^\circ\text{C}$	Значения $p_{s,}$ бар		Погрешность, %
	из таблицы	расчетные по (34.1)	
0	0,006108	0,006758	10,6
5	0,008718	0,00947	8,6
10	0,01227	0,01311	6,9
15	0,01704	0,01796	5,4
20	0,02337	0,02432	4,0
25	0,03167	0,03261	3,0
30	0,04241	0,04330	2,1
40	0,07375	0,07432	0,8
50	0,1234	0,1233	-
60	0,1992	0,1986	0,3
70	0,3116	0,3109	0,2
80	0,4736	0,4747	0,2
90	0,7011	0,7080	
100	1,013	1,0330	

Состояния и основные характеристики влажного воздуха

В зависимости от соотношения $p_{\text{п}}$ и p_s можно рассмотреть следующие состояния влажного воздуха [8].

Ненасыщенный влажный воздух. Парциальное давление паров воды $p_{\text{п}}$ меньше давления насыщения p_s при данной температуре: $p_{\text{п}} < p_s$. Температура паров воды (влажного воздуха) больше температуры насыщения (кипения) воды при данном давлении: $t_{\text{в}} > t_s$. Пары воды находятся в перегретом состоянии относительно температуры насыщения.

Насыщенный влажный воздух. Парциальное давление паров воды равно давлению насыщения при температуре воздуха: $p_{\text{п}} = p_s$. Температура влажного воздуха равна температуре насыщения воды при данном давлении: $t_{\text{в}} = t_s$.

Пересыщенный влажный воздух. Парциальное давление паров воды $p_{\text{п}}$ больше давления насыщения p_s при данной температуре. Температура влажного воздуха меньше температуры насыщения воды при давлении $p_{\text{п}}$: $t_{\text{в}} < t_s$. Происходит конденсация части паров или пары при отсутствии центров конденсации остаются в термодинамически неустойчивом (пересыщенном состоянии) состоянии.

Рассмотрим основные характеристики влажного воздуха. Все расчеты влажного воздуха ведут на 1 кг сухого воздуха.

Абсолютная влажность $\rho_{\text{п}}$ – количество паров воды в 1 м³ влажного воздуха.

Относительная влажность φ – отношение парциального давления паров воды $p_{\text{п}}$ к давлению насыщенных паров воды p_s при данной температуре воздуха $t_{\text{в}}$:

$$\varphi = p_{\text{п}}/p_s.$$

Относительная влажность φ меняется от 0 ($p_{\text{п}} = 0$, сухой воздух) до 1 ($p_{\text{п}} = p_s$, насыщенный влажный воздух).

Удельное влагосодержание d есть количество паров воды на 1 кг сухого воздуха:

$$d = \frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{в}}} = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{p_{\text{п}}\mu_{\text{п}}}{p_{\text{в}}\mu_{\text{в}}} = 0,622 \frac{\varphi p_s}{p - \varphi p_s}. \quad (34.2)$$

Удельное влагосодержание насыщенного воздуха ($\varphi = 1$)

$$d_s = 0,622 \frac{p_s}{p - p_s}. \quad (34.3)$$

Молярное влагосодержание d_μ – отношение количества киломолей водяного пара N_μ к количеству киломолей сухого воздуха N_B :

$$d_\mu = \frac{N_\mu}{N_B} = \frac{m_\mu / \mu_\mu}{m_B / \mu_B} = 1,608 \cdot d = \frac{\varphi p_s}{p - \varphi p_s}.$$

Относительное влагосодержание

$$\psi = \frac{d}{d_s} = \frac{\varphi p_s (p - p_s)}{(p - \varphi p_s) p_s} = \varphi \frac{p - p_s}{p - \varphi p_s}.$$

При малой относительной влажности $\varphi \ll 1$ $\varphi \approx \psi$.

Температура сухого термометра равна температуре влажного воздуха t_B .

Температура мокрого термометра t_M – равновесная температура, которую принимает датчик в потоке влажного воздуха, когда относительная влажность на поверхности датчика равна относительной влажности воздуха (что достигается смачиванием поверхности датчика).

Плотность влажного воздуха $\rho_{B,\mu} = \rho_\mu + \rho_B$. Выражая ρ_μ и ρ_B через парциальные давления p_μ и p_B , получим:

$$\rho_{B,\mu} = \frac{3,48 \cdot 10^{-3}}{T} [p - 0,378 p_s \varphi].$$

Кажущаяся молярная масса $\mu_{B,\mu}$ влажного воздуха

$$\mu_{B,\mu} = \mu_\mu r_\mu + \mu_B (1 - r_\mu),$$

где $r_\mu = \varphi p_s / p$. После преобразований и подстановки значений μ_μ и μ_B получим

$$\mu_{B,\mu} = 28,95 - 10,93 \frac{\varphi p_s}{p}.$$

Газовая постоянная

$$R_{B,\mu} = \frac{8314}{\mu_{B,\mu}} = \frac{8314}{28,95 - 10,93 \varphi p_s / p}.$$

Энтальпия сухого воздуха, при невысоких температурах и теплоемкости воздуха $c_{pB} = 1 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

$$i_{\text{в}} = c_{p \text{ в}} t_{\text{в}} \approx t_{\text{в}}.$$

Удельная энтальпия водяного пара при температуре влажного воздуха $t_{\text{в}}$

$$i_{\text{п}} = r_0 + c_{p \text{ п}} t_{\text{в}},$$

где r_0 – скрытая теплота парообразования воды при $t = 0^\circ\text{C}$; $c_{p \text{ п}}$ – теплоемкость паров воды. Принимаем в дальнейшем $r_0 = 2501$ кДж/кг, $c_{p \text{ п}} = 1,97$ кДж/(кг·К).

Для зависимости скрытой теплоты парообразования воды от температуры используем эмпирическое соотношение

$$r = 2501 - 2,43t. \quad (34.4)$$

Удельная энтальпия влажного воздуха $i_{\text{в.п}}$ рассчитывается на 1 кг сухого воздуха и равна сумме энтальпии 1 кг сухого воздуха $h_{\text{в}}$ и энтальпии d кг водяного пара $i_{\text{п}}d$:

$$i_{\text{в.п}} = i_{\text{в}} + i_{\text{п}}d = t_{\text{в}} + d(2501 + 1,97t_{\text{в}}).$$

Энтальпия насыщенного влажного воздуха ($d = d_s$)

$$i_{\text{в.п.с}} = t_{\text{в}} + d_s(2501 + 1,97t_{\text{в}}).$$

Энтальпия пересыщенного влажного воздуха ($d > d_s$) с каплями воды

$$i_{\text{в.п.с}} = t_{\text{в}} + d_s(2501 + 1,97t_{\text{в}}) + 4,19(d - d_s)t_{\text{в}}$$

Энтальпия пересыщенного влажного воздуха ($d > d_s$) с кристаллами льда

$$i_{\text{в.п.с}} = t_{\text{в}} + d_s(2501 + 1,97t_{\text{в}}) + (d - d_s)i_{\text{л}},$$

где $i_{\text{л}} = -r_{\text{л}} + c_{\text{л}}t \approx -335 + 2,1t$ – энтальпия льда (теплоту парообразования льда принимаем отрицательной), кДж/кг.

Испарение воды. Температура мокрого термометра

Так как парциальное давление паров воды в воздухе невелико, то для расчета массового потока паров с поверхности воды в воздух с температурой T_B можно воспользоваться уравнением

$$j_i = \frac{\beta}{R_{\Pi} T} (p_{\text{пв}} - p_{\text{п}\infty}). \quad (34.5)$$

Принимая в уравнении (34.2) для удельного влагосодержания $\rho_B \approx p$, получим приближенные выражения для $p_{\text{пв}}$ и $p_{\text{п}\infty}$:

$$p_{\text{пв}} = \frac{p\mu_B}{\mu_{\Pi}} d_w; \quad p_{\text{п}\infty} = \frac{p\mu_B}{\mu_{\Pi}} d_{\infty}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (34.5) и учитывая, что $R_{\Pi} = 8314/\mu_{\Pi}$, $R_B = 8314/\mu_B$, $\rho_B \approx p/R_B T$, получим:

$$j_i = \beta \rho_B (d_w - d_{\infty}), \quad (34.6)$$

где d_w и d_{∞} – удельное влагосодержание у испаряющейся поверхности и в окружающей среде.

Используя выражения для β , найдем:

$$j_i = \frac{\alpha}{c_p} (d_w - d_{\infty}). \quad (34.7)$$

Определим температуру мокрого термометра t_M . Используя уравнение (34.7), найдем:

$$\dot{m} = -D \frac{\partial \rho}{\partial R}, \quad (34.8)$$

где t_M и t_B – соответственно, температура «мокрого» (поверхности) и «сухого» (воздуха) термометров; r_M – скрытая теплота парообразования воды при температуре t_M ; d_{s_M} – удельное влагосодержание, соответствующее давлению насыщения при температуре t_M .

Записывая последнее уравнение через парциальные давления паров и подставляя значения $\mu_B = 28,95$ кг/кмоль, $\mu_{II} = 18$ кг/кмоль, $c_p = 1$ кДж/(кг·К), получим:

$$(t_B - t_M) = \frac{0,622 r_M}{p - p_{II\infty}} (p_{s,w} - p_{II\infty}). \quad (34.9)$$

Введем относительную влажность $\varphi = p_{s,B} / p_{s,B}$, где $p_{s,B}$ – давление насыщенных паров при температуре воздуха t_B . После преобразований найдем уравнение для относительной влажности:

$$\varphi = \frac{p_{s,M} - \frac{p(t_B - t_M)}{0,622 r_M}}{p_{s,B} \left(1 - \frac{(t_B - t_M)}{0,622 r_M} \right)}. \quad (34.10)$$

Если приближенно предположить, что в уравнении (34.9) $p - p_{II\infty} \approx p$, то получим:

$$\varphi = \frac{p_{s,M} - \frac{p(t_B - t_M)}{0,622 r_M}}{p_{s,B}}. \quad (34.11)$$

Из уравнений (34.10) и (34.11) следует, что при $t_M = t_B$, $p_{s,M} = p_{s,B}$, $\varphi = 100$ %.

Используя уравнения (34.1) и (34.4) для p_s и r , можно рассчитать психрометрические таблицы, связывающие относительную влажность воздуха φ с величиной t_M и $p(t_B - t_M)$.

Испарение в замкнутый объем. В этом случае плотность массового потока \dot{m} , удельное влагосодержание d и парциальное давление паров $p_{II\infty}$ будут меняться в процессе испарения. Дадим приближенный вывод уравнения плотности массового потока паров при испарении воды с поверхности A в ограниченный объем V при постоянной температуре поверхности. Удельное влагосодержание паров в воздухе d_∞ в момент времени τ

$$d_\infty = \frac{m_{II}}{m_B} = \frac{m_{II0} + j_i A \tau}{m_B} = \frac{m_{II0} + j_i A \tau}{V \rho_B} = d_0 + \frac{j_i A \tau}{V \rho_B},$$

где d_0 – начальное удельное влагосодержание паров в воздухе.

Свободный объем есть разность полного объема V_0 и объема жидкости $V_{\text{ж}}$ и принимается постоянным: $V = V_0 - V_{\text{ж}} = \text{const}$. Подставляя значение d_∞ в уравнение (34.6), получим:

$$j_i = \beta \rho_{\text{в}} (d_w - d_0) + \frac{\beta j_i A \tau}{V}.$$

Обозначим $j_{i0} = \beta \rho_{\text{в}} (d_w - d_0)$, тогда

$$j_i = \frac{j_{i0}}{1 + \frac{\beta A \tau}{V}} = \frac{j_{i0}}{1 + \frac{\beta \tau}{H - h_0}},$$

где H – высота резервуара; h_0 – высота начального столба жидкости (до начала испарения).

Контрольные вопросы

1. Что такое парциальное давление? Запишите закон Дальтона, уравнение Менделеева – Клапейрона, закон Клапейрона – Клаузиуса.
2. Запишите эмпирическую формулу, связывающую температуру и давление насыщенных паров воды? В каком диапазоне температур она наилучшим образом совпадает с экспериментальными данными?
3. Какие состояния влажного воздуха можно выделить в зависимости от соотношения парциального давления паров воды и давления насыщенного пара при данной температуре?
4. Дайте определение следующих понятий: абсолютная влажность, относительная влажность, удельное влагосодержание, молярное влагосодержание, относительное влагосодержание.
5. Что такое температура сухого и мокрого термометра?
6. Запишите формулу для нахождения плотности влажного воздуха, энтальпии сухого воздуха, энтальпии водяного пара.
7. Что такое критическое состояние жидкости?

Лекция 35. Стационарное испарение капли

Испарение неподвижной капли, константа испарения. Испарение капли при вынужденной конвекции. Обдуваемая капля. Летящая капля.

Испарение неподвижной капли, константа испарения

Испарение капли представляет собой диффузию паров вещества капли с ее поверхности в окружающую среду [8]. Плотность массового потока пара может быть посчитана по уравнению

$$j_i = -D \frac{\partial \rho}{\partial R}.$$

Скорость испарения капли (изменение массы в единицу времени)

$$G = \frac{\partial m}{\partial \tau} = -DA \frac{\partial \rho}{\partial R} = -4\pi R^2 D \frac{\partial \rho}{\partial R}, \quad (35.1)$$

где ρ – абсолютная концентрация пара.

На поверхности капли ($R = R_0$) концентрация пара ρ_s соответствует условиям насыщения при температуре поверхности, а в окружающей среде ($R = \infty$) концентрация пара равна ρ_∞ . Интегрируя уравнение (35.1) в указанных пределах, получим для стационарного испарения ($G = \text{const}$):

$$\frac{dm}{d\tau} = G = 4\pi D (\rho_s - \rho_\infty) R_0. \quad (35.2)$$

Скорость испарения капли прямо пропорциональна радиусу капли, коэффициенту диффузии паров и перепаду концентраций.

Так как в процессе испарения капли происходит уменьшение ее радиуса, скорость испарения является переменной величиной (уменьшается в процессе испарения). Поэтому при строгом подходе испарение капли следует рассматривать как нестационарный процесс. Поэтому для произвольного момента времени уравнение (35.2) можно записать через текущий радиус капли R :

$$G = 4\pi D (\rho_s - \rho_\infty) R.$$

Скорость испарения капли представляет собой скорость убывания ее массы во времени:

$$G = -\frac{dm_{\text{ж}}}{d\tau} = -4\pi R^2 \rho_{\text{ж}} \frac{dR}{d\tau},$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность вещества капли.

Приравнивая два последних уравнения и интегрируя при $\rho_s = \text{const}$ (испарение капли при постоянной температуре поверхности) и $\rho_{\infty} = \text{const}$, получим:

$$R_0^2 - R^2 = K_v \tau, \quad (35.3)$$

где K_v – константа испарения, $\text{м}^2/\text{с}$, которая при данных допущениях не меняется в процессе испарения.

$$K_v = \frac{2D(\rho_s - \rho_{\infty})}{\rho_{\text{ж}}}. \quad (35.4)$$

Из уравнения (35.3) следует, что при испарении неподвижной капли ее поверхность меняется во времени линейно (закон Срезневского). Время испарения капли найдем при $R = 0$:

$$\tau_k = \frac{R_0^2}{K_v}.$$

Концентрация паров меняется от ρ_s у поверхности капли до ρ_{∞} в окружающей среде.

$$\frac{\rho - \rho_{\infty}}{\rho - \rho_s} = \frac{R_0}{R}, \quad (35.5)$$

где ρ – концентрация паров на радиусе R .

При учете Стефанова потока константу испарения в уравнении (35.3) считают по соотношению

$$K_v^* = K_v \frac{p}{p^*}, \quad (35.6)$$

где поправка

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\lg \frac{p - p_{\infty}}{p - p_s}}{p_s - p_{\infty}}$$

Чем больше величина p_s/p , тем больше p/p^* и, соответственно, скорость испарения. При малых значениях p_s/p $p/p^* \rightarrow 1$.

При квазистационарном испарении поверхность капли имеет равновесную температуру T_p , которая является температурой мокрого термометра.

При температуре T_p имеет место равенство тепловых потоков, выражаемое уравнением

$$4\pi R^2 \alpha (T_B - T_p) = Gr.$$

Заменяя G согласно уравнению (35.2) и полагая для неподвижной капли $\alpha = \lambda_f / R$, константу испарения можно получить в виде

$$K_v = \frac{2\lambda_f (T_B - T_p)}{\rho_{ж} r}. \quad (35.7)$$

В случае значительного перепада температур, и соответственно, интенсивного испарения, массовый поток пара G через скорость стефановского течения среды $G / (A\rho_B)$ будет оказывать влияние на тепловой поток в капле (так как поток теплоты и поток паров имеют встречные направления).

В этом случае в величину константы испарения по уравнению (35.7) вводят поправку

$$K_v = \frac{2\lambda_f (T_B - T_p)}{\rho_{ж} r} \Phi, \quad (35.8)$$

где

$$\Phi = \frac{\ln \left[1 + \frac{c_{pн}}{r} (T_B - T_p) \right]}{\frac{c_{pн}}{r} (T_B - T_p)}.$$

Поправка Φ учитывает влияние испарения на теплообмен. Если изменение энтальпии пара $c_{pн}(T_B - T_p)$ мало по сравнению со скрытой теплотой парообразования r , то $\Phi \rightarrow 1$. С ростом отношения $\frac{c_{pн}(T_B - T_p)}{r}$ величина Φ уменьшается. Так, при $\frac{c_{pн}(T_B - T_p)}{r} = 1$ $\Phi = 0,7$.

Изменение температуры паров около поверхности капли радиусом R_0 описывается уравнением

$$\frac{T - T_p}{T_B - T_p} = 1 - \frac{R_0}{R}.$$

С увеличением температуры среды температура T_p также повышается, асимптотически приближаясь к температуре кипения при данном давлении. Температура T_p практически не зависит от относительной скорости и диаметра капли, так как с изменением этих величин тепловой и массовый потоки меняются в одинаковой мере. С увеличением давления насыщенных паров

диффузионный поток вещества от поверхности растёт, вследствие чего разность температур ($T_{\text{в}} - T_{\text{р}}$) возрастает, а температура стационарного испарения уменьшается.

При выборе теплофизических констант, входящих в уравнения (35.4) и (35.7), рекомендуется: теплоту парообразования r , давление насыщенного пара p_s брать при температуре поверхности $T_{\text{р}}$; коэффициенты диффузии D , температуропроводности a , кинематической вязкости ν , теплоемкости паров $c_{\text{р,л}}$ при температуре $(T_{\text{в}} - T_{\text{р}})/2$; коэффициент теплопроводности среды λ_f при температуре среды $T_{\text{в}}$.

Если капля лежит на плоской стенке и имеет форму полушария, то поля концентрации и температуры пара около ее поверхности не меняются (так как не нарушается сферическая симметрия), а в уравнение для скорости испарения необходимо ввести множитель 0,5. Исследования равновесного режима испарения несферических капель показали, что квадрат диаметра равнообъемной сферы меняется линейно во времени, что позволяет использовать закон Срезневского и для несферических капель.

При низкотемпературном испарении используют уравнения (35.4) и (35.6), причем при малых отношениях p_s/p можно принимать $p/p^* = 1$. При высокотемпературном испарении K_v подсчитывают по уравнению (35.8): при $T_{\text{в}} \gg T_s$ берут $T_{\text{р}} \approx T_s$. Если $T_{\text{в}} < T_s$, то испарение близко к изотермическому и лимитируется диффузией, при $T > T_s$ испарение лимитируется теплообменом.

Испарение капли при вынужденной конвекции. Обдуваемая капля. Летящая капля

В условиях вынужденной конвекции могут иметь место два режима испарения капель [8]. Первый – когда скорость обтекания капли постоянна и в процессе испарения меняются только размеры капли. Второй – испарение летящей капли, когда одновременно меняются и размеры, и скорость движения капли.

Обдуваемая капля. В этом случае достаточно в выражения для скорости и константы испарения ввести поправки, учитывающие увеличение коэффициентов тепломассообмена.

Используя уравнения для скорости испарения с поправками на влияние Стефанова потока и взаимное влияние тепломассообмена, получим:

$$G = 2\pi R D (\rho_s - \rho_\infty) \text{Nu}_m \frac{p}{p^*};$$

$$G = \frac{2\pi R \lambda_f}{r} (T_{\text{в}} - T_{\text{р}}) \text{Nu} \Phi.$$

При описании процессов массообмена обычно в первом приближении принимают равенство теплового и диффузионного чисел Нуссельта: $Nu_m = Nu$.

В табл. 35.1 приведен ряд зависимостей для диффузионного числа Нуссельта.

Используя приближенное выражение для числа Нуссельта $Nu_m = 0,55 Re^{0,5} Sc^{1/3}$, получим (при $Re \gg 2$)

$$-4\pi R^2 \rho_{ж} \frac{dR}{d\tau} = 2\pi R D (\rho_s - \rho_\infty) \frac{p}{p^*} Nu_m \frac{R^{0,5}}{R_0^{0,5}}.$$

Так как

$$\frac{2D}{\rho_\tau} (\rho_s - \rho_\infty) \frac{p}{p^*} = K_v,$$

то

$$-2R^{0,5} dR = K_v \frac{Nu_m}{2} \cdot \frac{1}{R_0^{0,5}} d\tau.$$

Таблица 35.1

Зависимости для числа Nu_m	Диапазон изменения параметров
$h_i = \int c_p dT + h_i^0$	$5 < Re < 400$
$Nu_m = 0,43 Re^{0,56} Sc^{1/3}$	$400 < Re < 10^5$
$Nu_m = 2 + 0,55 Re^{0,56} Sc^{1/3}$	$Re = 2 \dots 750$
$Nu_m = 2 + 0,6 Re^{0,5} Sc^{1/3}$	
$Nu_m = 2 \left(1 + 0,15 Re^{0,6} Sc^{0,6} \frac{\lambda_B}{\lambda_m} \right)$	$Re = 10^3 \dots 1,6 \cdot 10^3$

Интегрируя в пределах от $\tau = 0, R = R_0$ до текущих значений R и τ , получим:

$$2 \frac{R_0^{1,5} - R^{1,5}}{1,5} = K_v \frac{Nu_m}{2} \cdot \frac{1}{R_0^{0,5}} \tau,$$

и

$$1 - \bar{R}^{1,5} = \frac{3}{4} K_v \frac{Nu_m}{2} \cdot \frac{\tau}{R_0^2}, \tag{35.9}$$

где $\bar{R} = R/R_0$ – относительный радиус капли.

Из уравнения (35.9) следует, что в случае обдувания сферической капли потоком постоянной скорости линейно во времени меняется не ее поверхность R^2 , а величина $R^{1,5}$. Проведенная Н.Нишиваки шпирен-киносъемка испарения капель различных органических жидкостей подтвердила зависимость

$$\frac{dR^{1,5}}{d\tau} = \text{const}.$$

Уравнение (35.9) может быть использовано для приближенной оценки испарения капель бензина во впускных трубопроводах карбюраторных двигателей. При этом температура капель меняется незначительно, а температура воздуха меньше средней температуры разгонки топлива. Поэтому при расчетах целесообразно использовать для константы испарения формулу (35.4).

Летающая капля. В процессе испарения летающей капли меняются одновременно ее размеры и скорость, а кроме того, форма и условия испарения по поверхности капли. При расчете необходимо учитывать силы аэродинамического сопротивления и тяжести, а также реактивную силу, возникающую при оттоке паров. Если капля совершает криволинейное движение, то необходимо учитывать массовые силы. Приближенный расчет испарения движущейся капли дает выражение вида:

$$1 - \bar{R}^{1,5} = \frac{K_v / R_0^2}{\frac{2w_0 q_w}{\text{Nu}_m}} \ln(1 + w_0 q_w \tau),$$

где $q_w = \frac{3c_f}{2R_0} \cdot \frac{\rho_v}{\rho_k}$; w_0 – начальная скорость капли; Nu_m – диффузионное число

Нуссельта, рассчитанное по w_0 ; c_f – коэффициент сопротивления движению капли.

Контрольные вопросы

1. Выведите формулу для расчета скорости испарения неподвижной капли.
2. Почему скорость испарения капли является переменной величиной? Как она меняется в процессе испарения капли?
3. Сформулируйте закон Срезневского.
4. Запишите формулу для расчета константы испарения.
5. Какие режимы испарения капли возможны при вынужденной конвекции?
6. Какие факторы необходимо учитывать при расчете испарения летающей капли?
7. Запишите критериальные уравнения, используемые для расчета диффузионного числа Нуссельта для разных диапазонов чисел Рейнольдса.

Лекция 36. Тепло- и массообмен при химических превращениях

Основные уравнения тепло- и массообмена при химических превращениях. Число Льюиса-Семенова. Теплообмен между газовой смесью и поверхностью раздела фаз.

Основные уравнения тепло- и массообмена при химических превращениях. Число Льюиса-Семенова

Процессы теплообмена, сопровождающиеся химическими реакциями, имеют место в камерах сгорания различных двигателей (реактивных, газовых турбин и др.), в химическом производстве, в МГД-установках, при гиперзвуковых скоростях полета в плотной атмосфере и других случаях [8].

Химические реакции могут сопровождаться выделением или поглощением энергии в различных формах. Нами будут рассмотрены только химические реакции, происходящие с поглощением теплоты (эндотермические реакции) или с ее выделением (экзотермические реакции).

Химические реакции могут идти как на поверхности тела, так и в жидкой среде, омывающей это тело. В первом случае реакции называются гетерогенными, во втором – гомогенными.

Если реакции происходят вдали от тела (вне пределов пограничного слоя), то они могут не сказываться на теплоотдаче и теплообмен в пограничном слое можно рассчитывать обычными методами. В противном случае нужно учитывать выделение или поглощение теплоты в пограничном слое или непосредственно на стенке.

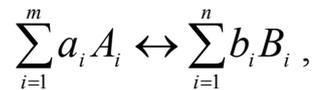
В дальнейшем, прежде всего, будут рассмотрены процессы, происходящие в газовых смесях и на омываемых ими стенках. Такой выбор объекта рассмотрения объясняется не только лучшей его изученностью, но и значительным практическим интересом к подобным задачам.

Рассмотрим некоторые положения термохимии, представляющие интерес для изучаемых нами процессов.

Как следует из первого закона термодинамики, если реакция идет при постоянных давлениях и температуре, теплота химической реакции ΔH будет равна разности энтальпий начального и конечного состояний (при этом предполагается, что совершается только работа расширения) и не зависит от пути процесса:

$$Q_{p = \text{const}} = H_2 - H_1 = \Delta H.$$

В дальнейшем будем полагать, что рассматриваемые реакции идут при постоянном давлении смеси (что обычно выполняется для процессов тепло- и массообмена) и при постоянной температуре (что выполняется для локальных значений при стационарном режиме). Тогда для любой химической реакции, описываемой стехиометрическим уравнением вида



теплота химической реакции, равная по абсолютной величине выделенному количеству теплоты ΔH , Дж / кмоль, взятому с обратным знаком, может быть выражена уравнением

$$-\Delta H = \sum_{i=1}^m a_i H_{A_i} = \sum_{i=1}^n b_i H_{B_i}. \quad (36.1)$$

Здесь A_i и B_i – химические символы, соответственно, реагентов и продуктов реакции; a_i и b_i – стехиометрические коэффициенты, представляющие собой соответственно число молей реагентов и продуктов реакции; H_{A_i} и H_{B_i} – молярные энтальпии реагентов и продуктов реакции.

Если реакция является эндотермической, то теплота реакции считается положительной; при выделении теплоты – отрицательной. Такая система знаков теплот реакций называется термодинамической.

Теплота химической реакции зависит от температуры, при которой протекает процесс, однако для большей части химических реакций эта зависимость слаба. Будем в дальнейшем полагать, что теплота химической реакции постоянна, т. е. не изменяется в конкретном процессе теплообмена для конкретных реакций.

В термохимических расчетах используется понятие теплоты образования. Теплота образования представляет собой теплоту химической реакции при образовании данного вещества из исходных простых веществ. Теплоты образования большого количества химических веществ приводятся в справочниках.

В задачах с химическими превращениями используется энтальпия, в которую включается теплота образования данного компонента из исходных веществ. Полная удельная энтальпия i -го компонента

$$h_i = \int c_p dT + h_i^0, \quad (36.2)$$

где h_i^0 – удельная теплота образования i -го компонента, Дж / кг. Если при образовании i -го компонента тепловая энергия подводится, то $h_i^0 > 0$; если отводится, то $h_i^0 < 0$.

Для смеси газов энтальпия определяется по правилу аддитивности:

$$h = \sum_{i=1}^n m_i h_i, \quad (36.3)$$

где $m = \rho_i / \rho$ – относительная массовая концентрация i -го компонента смеси, кг/м³; ρ – плотность смеси, кг/м³.

Отнесем теплоту химической реакции, определяемую уравнением (36.1), к единице массы реагентов и продуктов реакции. По определению

$$h_{A_i} = \frac{H_{A_i}}{M_{A_i}}, \quad h_{B_i} = \frac{H_{B_i}}{M_{B_i}},$$

где M_{A_i} и M_{B_i} – молекулярные массы веществ A_i и B_i .

Тогда из уравнения (36.1) следует, что величина удельного тепловыделения определяется следующими уравнениями:

$$\Delta h_{A_i} = \frac{-\Delta H}{M_{A_i}} = a_1 h_1 + \frac{1}{M_{A_i}} \left(\sum_{i=2}^m M_{A_i} a_i h_{A_i} - \sum_{i=1}^n M_{B_i} b_i h_{B_i} \right),$$

$$\Delta h_{B_i} = \frac{-\Delta H}{M_{B_i}} = b_1 h_1 + \frac{1}{M_{B_i}} \left(\sum_{i=2}^m M_{A_i} a_i h_{A_i} - \sum_{i=1}^n M_{B_i} b_i h_{B_i} \right).$$

Тепло- и массообмен зависят не только от теплоты химических превращений, но и от скорости прохождения последних. Скоростью химической реакции называется количество молекул данного сорта, реагирующих в единицу времени. Чтобы можно было сравнить скорости различных реакций, их обычно определяют как число молекул или молей данного вещества, реагирующих в единицу времени в единице объема фазы в случае гомогенной реакции или на единице поверхности раздела фаз в случае гетерогенной реакции.

Рассмотрим коротко некоторые положения химической кинетики. Под кинетикой реакции понимают зависимость скорости реакции от концентрации реагентов, температуры и некоторых других факторов.

Реакции могут быть как простыми, так и сложными. Сложные реакции осуществляются в результате одновременного протекания нескольких простых. Например, гомогенная газовая реакция $2\text{NO} + \text{O}_2 = \text{N}_2\text{O}_4$ складывается

из следующих реакций (стадий): $2\text{NO}=(\text{NO})_2$, $(\text{NO})_2+\text{O}_2=\text{N}_2\text{O}_4$. Димер окиси азота $(\text{NO})_2$ является промежуточным веществом.

В случае простой обратимой реакции ее скорость

$$\omega = \vec{\omega} - \bar{\omega},$$

где $\vec{\omega}$ и $\bar{\omega}$ – скорости реакции в прямом и обратном направлениях.

Если $\omega \neq 0$, процесс является химически неравновесным, если $\omega = 0$ – химически равновесным. Под химическим равновесием понимают такое состояние реагирующей системы, при котором рассматриваемая химическая реакция происходит одновременно в двух противоположных направлениях с одинаковой по абсолютной величине скоростью, вследствие чего состав смеси остается постоянным.

В идеальных газовых смесях скорости одностадийных гомогенных реакций подчиняются закону действующих масс. Согласно этому закону скорость реакции $\sum a_i A_i \rightarrow \sum b_i B_i$ зависит от концентрации реагентов A_i и определяется выражением

$$\vec{\omega} = \vec{k} \rho_{A_1}^{a_1} \rho_{A_2}^{a_2} \dots,$$

где ρ_A – концентрация вещества A ; k – константа скорости реакции.

Скорость обратной реакции

$$\bar{\omega} = \bar{k} \rho_{B_1}^{b_1} \rho_{B_2}^{b_2} \dots$$

Скорость прямой реакции уменьшается по мере ее протекания, если исходные концентрации фиксированы; скорость обратной реакции при этом увеличивается. Когда скорости обеих реакций станут одинаковыми, достигается состояние химического равновесия. При этом

$$\frac{\rho_{B_1}^{b_1} \rho_{B_2}^{b_2} \dots}{\rho_{A_1}^{a_1} \rho_{A_2}^{a_2} \dots} = \frac{\vec{k}}{\bar{k}} = K.$$

Здесь K – константа равновесия, величина, постоянная для данной реакции и температуры.

Кинетика сложных реакций может быть описана путем применения закона действующих масс к каждой стадии.

Константа скорости, а следовательно, и скорость реакции увеличиваются с повышением температуры.

Как следует из изложенного, скорости химических реакций и, следовательно, скорости выделения (поглощения) тепла зависят от концентрации

реагентов и температуры. Поля же концентраций и температур зависят не только от хода реакций, но и от процессов тепло- и массообмена, идущих одновременно с химическими превращениями. Таким образом, в общем случае химические превращения и тепло- и массообмен оказываются тесно связанными и взаимозависящими.

Определение энтальпии согласно уравнениям (36.2) и (36.3) позволяет использовать для расчета тепло- и массообмена при химических превращениях многие ранее полученные соотношения.

Плотность потока теплоты в диффундирующей смеси описывается уравнением

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{\omega} i + \sum \vec{j}_{м.д,i} i_i.$$

В случае химических реакций уравнение запишется в виде

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{\omega} h + \sum \vec{j}_{м.д,i} h_i.$$

Здесь первый член правой части уравнения учитывает перенос теплоты теплопроводностью, второй – конвекцией и третий – молекулярной диффузией. В этом уравнении не надо отдельно учитывать выделение или поглощение теплоты за счет химических реакций.

Для случая химических реакций уравнение энергии можно записать в следующем виде:

$$\rho \frac{dh}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t - \text{div}[(h_1 - h_2) \vec{j}_1]. \quad (36.4)$$

Согласно (36.4) локальное изменение энтальпии во времени вызвано теплопроводностью, конвекцией и молекулярной диффузией. Принимая, что последняя осуществляется только концентрационной диффузией, т. е.

$$\vec{j}_1 = -\rho D \nabla m_1,$$

Уравнение (36.4) можно записать в следующем виде:

$$\rho \frac{dh}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t + \text{div}[(h_1 - h_2) \rho D \nabla m_1]. \quad (36.4')$$

Конечно, при этом уравнение (36.4) справедливо для бинарной смеси диффундирующих друг в друга компонентов. При выводе не учтены воз-

возможные внутренние источники тепла, не вызванные химическими реакциями, физические параметры считаются постоянными.

Преобразуем правую часть уравнения (36.4). Предварительно выполним некоторые вспомогательные выкладки.

По определению энтальпия смеси $h = \sum m_i h_i$. Отсюда

$$dh = \sum h_i dm_i + \sum m_i dh_i,$$

где $dh_i = di_i$, поскольку $dh_i^0 = 0$. Полагаем, что $di_i = c_p dT$. Тогда

$$dh = \sum h_i dm_i + \sum m_i di_i$$

или

$$dh = \sum h_i dm_i + \sum m_i c_{pi} dT_i.$$

Обозначая $c_p = \sum m_i c_{pi}$, где c_p – средняя теплоемкость смеси, можно написать:

$$dh = c_p dT + \sum h_i dm_i.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$dT = \frac{dh}{c_p} - \frac{\sum h_i dm_i}{c_p}.$$

Отсюда для бинарной смеси производная, например, по y будет:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \sum h_i \frac{\partial m_i}{\partial y} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \left(h_1 \frac{\partial m_1}{\partial y} + h_2 \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \frac{\partial m_1}{\partial y} (h_1 + h_2). \end{aligned}$$

Здесь использовано то, что $m_1 + m_2 = 1$ и $j_1 = -j_2$.

Полученное значение $\partial t / \partial y$ используем для преобразования правой части уравнения (36.4'). Для краткости преобразуем только выражение

$$\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D (h_1 - h_2) \frac{\partial m_1}{\partial y} \right).$$

Для осей Ox и Oz преобразования выполняются аналогично.

Подставляя в предыдущее выражение значение $\partial t / \partial y$, получаем:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D (h_1 - h_2) \frac{\partial m_1}{\partial y} \right] &= \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{c_p} \frac{\partial m_1}{\partial y} (h_1 - h_2) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D (h_1 - h_2) \frac{\partial m_1}{\partial y} \right] &= \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\rho c_p D} \right) (h_1 - h_2) \rho D \frac{\partial m_1}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + (1 - Le^{-1}) \frac{\partial}{\partial y} \left[(h_1 - h_2) \rho D \frac{\partial m_1}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

где $Le = Pr / Pr_d = \rho c_p D / \lambda = D / a$ – число Льюиса – Семенова.

С учетом сделанных преобразований дифференциальное уравнение энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{dh}{d\tau} = a \nabla^2 h + (1 - Le^{-1}) \operatorname{div} [(h_1 - h_2) D \nabla m_1]. \quad (36.4'')$$

Если $Le = 1$, то последний член правой части уравнения (36.4'') равен нулю и, следовательно, отсутствует перенос теплоты путем молекулярной диффузии.

Согласно уравнению энергии (36.4) поле энтальпии h зависит от распределения скорости смеси и поля концентраций. Скорость смеси входит в полную производную $dh/d\tau$:

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{\partial h}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Влияние поля концентраций учитывается вторым членом правой части уравнения. Напомним, что уравнение (36.4''), как и уравнение (36.4'), получено при учете только концентрационной диффузии.

Для учета влияния полей скорости и концентраций к уравнению энергии (36.4) нужно добавить уравнения движения и массообмена.

Уравнения движения и непрерывности для смеси по форме записи не отличаются от уравнений для однородной среды. В уравнение же массообмена необходимо ввести дополнительный член j_{vi} , кг/(м³·с), учитывающий источник массы i -го компонента за счет химических превращений.

С учетом сказанного уравнение массообмена может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dm_i}{d\tau} = D \nabla^2 m_i + \frac{j_{vi}}{\rho}. \quad (36.5)$$

Конечно, общая масса всех компонентов, участвующих в реакциях, не изменяется.

Для определения j_{vi} к дифференциальным уравнениям энергии, массообмена, движения и непрерывности должны быть добавлены уравнения химической кинетики. Необходимость использования уравнений химической кинетики усложняет задачу.

Имеется несколько частных случаев, когда задача упрощается:

гомогенные реакции очень медленны, а скорости массообмена очень велики;

гомогенные реакции очень быстры, а скорости массообмена очень малы; число Льюиса – Семенова равно единице.

В первом случае реакции не успевают сколько-нибудь заметно изменить состав смеси и задача формально сводится к расчету тепло- и массообмена без химических превращений. Такой процесс называют замороженным.

Во втором случае, когда скорости реакций велики по сравнению со скоростями диффузии и конвекции, согласно уравнению (36.5) состав смеси прежде всего определяется членом, учитывающим источник массы определенного компонента. Можно полагать, что при этом устанавливается химическое равновесие, и состав смеси является функцией только температуры. Влияние химических реакций проявляется только через физические свойства смеси, представленные в уравнениях энергии, движения и непрерывности. Эти уравнения аналогичны соответствующим уравнениям для однородной среды. Такой процесс называют равновесным.

В третьем случае, когда $Le = 1$, математически задача такая же, как и для теплообмена при отсутствии массообмена. Как следует из уравнения энергии (36.4), поле энтальпий не зависит от молекулярной диффузии.

Таким образом, в первом случае могут быть использованы решения задач тепло- и массообмена без химических превращений, во втором и третьем – решения для однородной среды. Конечно, во всех случаях в соответствующие уравнения вместо температур вводятся полные энтальпии.

Для простоты и наглядности физические свойства газовой смеси приняты постоянными.

При химических реакциях теплоотдачу описывают преобразованным законом Ньютона – Рихмана:

$$q_c = \frac{\alpha}{c_p} (h_0 - h_c). \quad (36.6)$$

Здесь h_0 и h_c – энтальпии газовой смеси, соответственно, на удалении от поверхности раздела фаз и на ней; энтальпии h_0 и h_c вычисляются по уравнениям (36.2) и (36.3), т. е. с учетом теплоты образования; c_p – удельная изобарная теплоемкость газовой смеси.

Замена в законе Ньютона – Рихмана температур энтальпиями позволяет учесть основное влияние химических реакций на процесс теплоотдачи.

При использовании уравнения (36.6) значения коэффициентов теплоотдачи в первом приближении можно брать из формул для течений без химических реакций.

Перенос теплоты, учитываемый уравнением (36.6), осуществляется теплопроводностью, конвекцией и молекулярной диффузией. В сложных случаях теплообмена уравнение (36.6), оставаясь пригодным, не определяет полностью тепловой поток, поступающий на стенку.

Теплообмен между газовой смесью и поверхностью раздела фаз

В зависимости от сочетания тех или иных условий протекания реакций методика расчета результирующего теплового потока между газовой смесью и поверхностью раздела фаз может несколько изменяться. Расчет теплообмена во многом зависит от места прохождения химических реакций.

Гомогенные реакции могут проходить в газовой смеси без наличия в ней компонентов стенки; материал стенки остается при этом химически нейтральным и является только проводником тепла. В других случаях в гомогенных реакциях может участвовать испарившийся материал стенки, причем испарение может идти как из твердой фазы (сублимация), так и из предварительно расплавленного твердого материала. Реакция между газовой смесью и твердой фазой может идти и на поверхности последней (гетерогенная реакция).

Независимо от названных условий протекания реакций при расчете задач тепло- и массообмена сохраняются некоторые общие приемы, заключающиеся в учете определенных факторов, влияющих на результирующий тепловой поток к стенке. Приведенный ниже пример поможет выяснить эти факторы.

Рассмотрим теплообмен между реагирующим пограничным слоем и испаряющейся поверхностью твердого тела. За пределами пограничного слоя параметры газа – плотность смеси ρ_0 , тангенциальная скорость $w_x = w_0$, концентрации компонентов смеси m_{i0} – постоянны. Будем полагать для простоты, что число Прандтля газового потока равно единице. Запишем уравнение теплового баланса для поверхности раздела газ – стенка (рис.36.1):

$$q_{c(t)} = q_{c(r)} + (\rho w_y)_c h_{E(t)c} - (\rho w_y)_c h_c \quad (36.7)$$

Здесь $q_{c(t)}$ – плотность теплового потока на границе раздела газ – стенка в твердом теле; $q_{c(r)}$ – то же, но в газе; $(\rho w_y)_c$ – плотность потока массы смеси на границе раздела фаз; h_c – энтальпия газовой смеси на границе раздела; $h_{E(t)c}$ – то же для материала поверхности, находящегося в твердой фазе.

Первый член правой части уравнения (36.7) представляет теплоотдачу за счет конвективного теплообмена (с учетом теплопроводности, конвекции и молекулярной диффузии) от реагирующего пограничного слоя к границе раздела. Второй член описывает обратный поток тепла, приходящий к границе раздела от твердой фазы и обусловленный плавлением, химическими реакциями или испарением. Третий член представляет энтальпию, переносимую от границы раздела внутрь пограничного слоя за счет потока массы от поверхности стенки.

Согласно (36.6) член $q_{c(r)}$ может быть описан уравнением

$$q_{c(r)} = \frac{\alpha}{c_p} (h_0 - h_c).$$

С учетом испарения ($E_{(т)} \rightarrow E_{(г)}$)

$$h_{E_{(т)}} + r_{и} = h_{E_{(г)}},$$

где $r_{и}$ – удельная теплота испарения материала поверхности с химическим символом E .

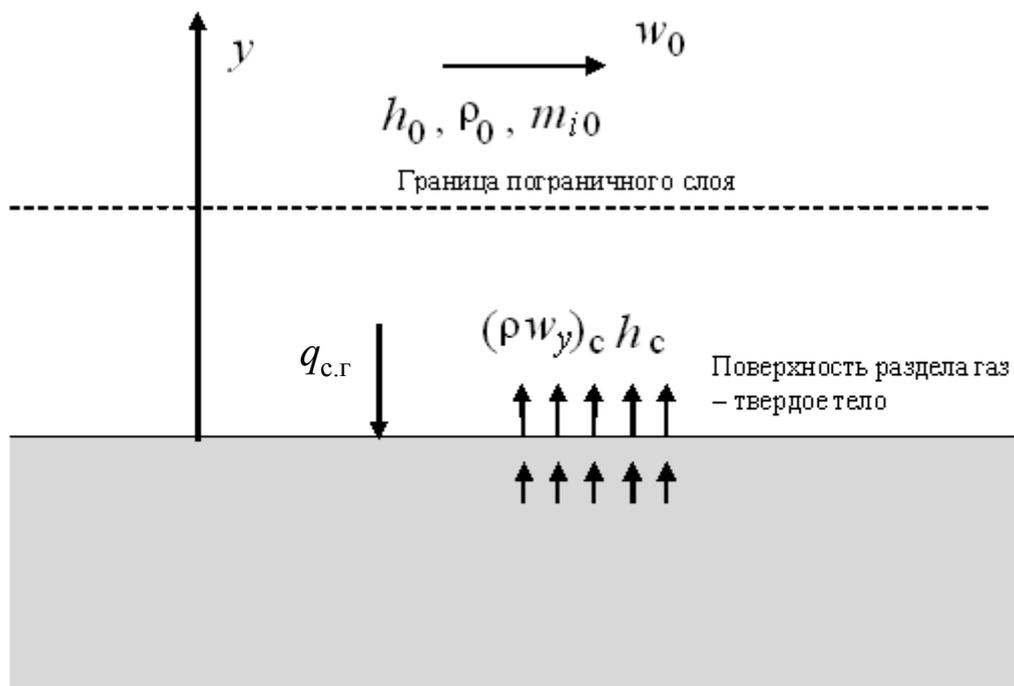


Рис. 36.1

Учитывая последние соотношения, уравнение (36.7) можно записать в следующем виде:

$$q_{c(\tau)} = \frac{\alpha}{c_p} \left[(h_0 - h_c) - \frac{r_H + h_c - h_{E(r)c}}{St} \right]. \quad (36.8)$$

Здесь $St = \frac{\alpha}{(\rho w_y)_c c_p}$.

Уравнение (36.8) может быть записано и в другом виде, если учесть, что $h = \sum m_i h_i$ и, следовательно,

$$q_{c(\tau)} = \frac{\alpha}{c_p} \left[\sum m_{i0} (h_{i0} - h_{ic}) - \frac{r_H}{St} + \sum_{i \neq E} h_{ic} \left(m_{i0} - m_{ic} - \frac{m_{ic}}{St} \right) + h_{E(r)c} \left(\frac{1 - m_{Ec}}{St} - m_{Ec} \right) \right].$$

Таким образом, расчет теплового потока, уходящего в стенку, сводится к вычислению параметров газовой смеси на границе раздела фаз и вдали от нее.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры приборов и устройств, в которых процессы тепломассообмена сопровождаются химическими реакциями.
2. Дайте определение экзотермических, эндотермических, гомогенных и гетерогенных реакций.
3. Что такое теплота химической реакции? Как ее вычислить?
4. Запишите формулу для полной энтальпии. Как вычислить полную энтальпию для смеси газов?
5. Сформулируйте закон действующих масс.
6. Что такое скорость химической реакции? Как ее вычислить?
7. Дайте определение понятия химического равновесия. Что такое константа равновесия?
8. Запишите основные уравнения тепло- и массообмена в случае протекания химических реакций.
9. Чему равно число Льюиса – Семенова?
10. Запишите закон Ньютона – Рихмана для случая теплообмена между газовой смесью и поверхностью раздела фаз.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список основных обозначений

Обозначение	Название	Единица измерения
A	Приведенный коэффициент поглощения	
Ar	Число Архимеда	
a	Коэффициент температуропроводности	m^2/c
Bi	Число Био	
C	Теплоемкость	Дж/К
c	Удельная теплоемкость	Дж/(кг·К)
c_0	Коэффициент излучения абсолютно черного тела	Вт/($m^2 \cdot K^4$)
D	Коэффициент молекулярной диффузии	m^2/c
d	Диаметр	м
E	Коэффициент тепловой эффективности ребра	
E	Интегральная плотность полусферического излучения или излучательная способность тела	Вт/ m^2
Eu	Число Эйлера	
F	Площадь поверхности	m^2
f	Объемная сила	Н/ m^3
Fo	Число Фурье	
G	Массовый расход	кг/с
g	Ускорение свободного падения	m/c^2
Gr	Число Грасгофа	
$grad t$	Градиент температуры	К/м или $^{\circ}C/m$
i	Удельная энтальпия	Дж/кг
J	Поток массы	кг/с
J_0	Функция Бесселя нулевого порядка I рода	
J_1	Функция Бесселя первого порядка I рода	
J_{λ}	Спектральная интенсивность излучения	Вт/ m^3
j	Плотность потока массы	кг/($m^2 \cdot c$)
K	Коэффициент формы тела	m^2
k	Коэффициент теплопередачи	Вт/($m^2 \cdot K$)

k	Толщина температурного пограничного слоя	м
k_l	Линейный коэффициент теплопередачи	Вт/(м·К)
K_0	Функция Бесселя нулевого порядка II рода	
K_1	Функция Бесселя первого порядка II рода	
Nu	Число Нуссельта	
L	Длина	м
M	Масса жидкости	кг
m	Локальное массосодержание	
m	Темп охлаждения	с ⁻¹
n	Нормаль к поверхности	м
p	Давление	Па
Pe	Число Пекле	
Po	Число Померанцева	
Pr	Число Прандтля	
Q	Тепловой поток	Вт
\bar{Q}	Интегральный или полный лучистый поток	Вт
Q_λ	Поток монохроматического, спектрального или однородного излучения	Вт/м
q	Плотность теплового потока	Вт/м ²
q_l	Линейная плотность теплового потока	Вт/м
q_v	Объемная плотность теплового потока	Вт/м ³
Q_τ	Количество теплоты	Дж
R	Безразмерный радиус	
R	Термическое сопротивление теплопередачи	м ² ·К/Вт
r	Радиус	м
R_1	Термическое сопротивление теплоотдачи от горячей жидкости к стенке	м ² ·К/Вт
R_2	Термическое сопротивление теплоотдачи от стенки к холодной жидкости	м ² ·К/Вт
R_c	Термическое сопротивление теплопроводности	м ² ·К/Вт
Re	Число Рейнольдса	
R_l	Линейное термическое сопротивление теплопередачи	м·К/Вт
R_{l1}	Линейное термическое сопротивление теплоотдачи от горячей жидкости к стенке	м·К/Вт
R_{l2}	Линейное термическое сопротивление теплоотдачи от стенки к холодной жидкости	м·К/Вт
R_{lc}	Линейное термическое сопротивление теплопроводности	м·К/Вт
T	Температура	К

t	Температура	$^{\circ}\text{C}$
v, V	Объем	м^3
W	Безразмерная скорость	
w	Скорость жидкости	м/с
X	Безразмерная координата вдоль оси Ox	
Y	Безразмерная координата вдоль оси Oy	
Z	Безразмерная координата вдоль оси Oz	
x	Координата вдоль оси Ox	м
y	Координата вдоль оси Oy	м
z	Координата вдоль оси Oz	м
α	Коэффициент теплоотдачи	$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$
β	Коэффициент массоотдачи	м/с
β	Температурный коэффициент объемного расширения	К^{-1}
Δ	Разность	
δ	Толщина гидродинамического пограничного слоя	м
δ	Толщина стенки	м
ε	Степень черноты	
ε_t	Изотермическая сжимаемость	Па^{-1}
Θ	Безразмерная избыточная температура	
ϑ	Температурный напор (избыточная температура)	К или $^{\circ}\text{C}$
λ	Коэффициент теплопроводности	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
μ	Корень характеристического уравнения	
μ	Динамическая вязкость	$\text{Па} \cdot \text{с}$
μ	Молярная масса	кг/моль
ν	Кинематическая вязкость	$\text{м}^2/\text{с}$
ρ	Плотность	$\text{кг}/\text{м}^3$
ρ_i	Местная концентрация	$\text{кг}/\text{м}^3$
τ	Время	с
φ	Полярный угол	рад
Ψ	Коэффициент неравномерности распределения температуры в теле	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Теплообмен : учеб. пособие к практ. занятиям / М. С. Лобасова, А. А. Дектерев, Д. С. Серебренников. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – (Теплообмен : УМКД № 1536-2008 / рук. творч. коллектива М. С. Лобасова).
2. Теплообмен : метод. указания к лаб. работам / сост. : К. А. Фиников, М. С. Лобасова. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – (Теплообмен : УМКД № 1536-2008 / рук. творч. коллектива М. С. Лобасова).
3. Теплообмен : метод. указания по самостоятельной работе / сост. : М. С. Лобасова, А. А. Дектерев, К. А. Фиников, Д. С. Серебренников. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – (Теплообмен : УМКД № 1536-2008 / рук. творч. коллектива М. С. Лобасова).
4. Цветков, Ф. Ф. Теплообмен : учеб. пособие для вузов / Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев. – М. : МЭИ, 2006. – 550 с.
5. Цветков, Ф. Ф. Задачник по теплообмену. учеб. пособие / Ф. Ф. Цветков, Р. В. Керимов, В. И. Величко. – М. : МЭИ, 2008. – 196 с.
6. Чередниченко, В.С. Электрические печи сопротивления. Теплопередача и расчет электропечей сопротивления. / В. С. Чередниченко, А. С. Бородачев, В. Д. Артемьев. – Новосибирск : НГУ, 2006. – 624 с.
7. Теплотехника : учеб. для вузов / В. Н. Луканин, М. Г. Шатров, Г. М. Камфер и др. ; под ред. В. Н. Луканина. – М. : Высш. шк., 2006. – 671 с.
8. Теоретические основы теплотехники : учеб. пособие / В. И. Ляшков. – М. : Высш. школа, 2007. – 300 с.
9. Алексеенко, С. В. Теория процессов переноса в сплошных средах: учеб. пособие/ С. В. Алексеенко, С. И. Лежнин. – Новосибирск : НГУ, 2005. – 106 с.
10. Теоретические основы теплотехники. Теплообмен : учеб. пособие / Ю. В. Видин. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2005. – 327 с.
11. Теплопередача : учеб. пособие / под ред. В. С. Чередниченко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 200 с.

Дополнительная литература

12. СТО 4.2-07–2008. Система менеджмента качества. Общие требования к построению, изложению и оформлению документов учебной и научной деятельности [текст] / разработ. : Т. В. Сильченко, Л. В. Белошапко, В. К. Младенцева, М. И. Губанова. – Введ. впервые 09.12.2008. – Красноярск : ИПК СФУ, 2008. – 47 с.
13. Каталог лицензионных программных продуктов, используемых в СФУ / сост. : А. В. Сарафанов, М. М. Торопов. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2008. – Вып. 3.
14. Швыдкий, В. С. Математические методы теплофизики : учеб. для вузов / В. С. Швыдкий, М. Г. Ладыженский, В. С. Шаврин. – М. : Машиностроение-1, 2001. – 232 с.
15. Видин, Ю. В. Тепломассообмен : учеб.-метод. пособие к выполнению контрольных заданий / Ю. В. Видин, В. В. Колосов. – Красноярск : Изд-во КГТУ, 1998. – 56 с.
16. Видин, Ю.В. Теоретические основы теплотехники : лаб. практикум / Ю. В. Видин. – Красноярск : КГТУ, 1998. – 48 с.
17. Исаченко, В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М. : Энергия, 1969. – 424 с.
18. Бойков, Г. П. Основы тепломассообмена: учеб. пособие / Г. П. Бойков, Ю. В. Видин, В. М. Журавлев. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2000. – 272 с.
19. Краснощеков, Е. А. Задачник по теплопередаче / Е. А. Краснощеков, А. С. Сукомел. – М. : Энергия, 1980. – 288 с.
20. Петухов, Б. С. Теплообмен в ядерных энергетических установках : учеб. пособие / Б. С. Петухов, Л. Г. Генин, С. А. Ковалев. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 470 с.
21. Михеев, М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – М. : Энергия, 1973. – 320 с.
22. Лыков, А. В. Тепломассообмен: справочник / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1972. – 560 с.
23. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 600 с.
24. Кейс, В. М. Конвективный тепло- и массообмен / В. М. Кейс. – М. : Энергия, 1972. – 446 с.
25. Себеси, Т. Конвективный теплообмен / Т. Себеси. – М. : Мир, 1987. – 590 с.
26. Дульнев, Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Г. Н. Дульнев. – М. : Высш. шк., 1990. – 207 с.
27. Лабораторный практикум по термодинамике и теплопередаче / под ред. В. И. Крутова, Е. В. Шишова. – М. : Высш. шк., 1988. – 216 с.
28. Практикум по теплопередаче : учеб. пособие / А. П. Солодов, Ф. Ф. Цветков, А. В. Елисеев и др. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 296 с.
29. Задачник по технической термодинамике теории тепломассообмена /

- под ред. В. В. Крутова и Г. Б. Петражицкого. – М. : Высш. шк., 1986. – 383 с.
30. Metallurgical heat engineering : in 2 vols. Vol. 1. Theoretical foundations: textbook for universities / V. A. Krivandin, V. A. Arutyunov, B. S. Mastryukov and others. – M. : Metallurgy, 1986. – 424 p.
31. Theory of heat exchange : textbook for universities / S. I. Isaev, I. A. Kozhinov, V. I. Kofanov and others.; under the editorship of A. I. Leontyeva. – M. : Higher school, 1979. – 496 p.

Электронные и интернет-ресурсы

32. Heat exchange [Electronic resource]: electronic textbook-methodical complex by discipline / M. S. Lobasova, K. A. Finnikov, T. A. Milovidova [and others]. – Electronic data. (105 Mb). – Krasnoyarsk: IIPK SFU, 2009. – (Heat exchange: UMKD No 1536-2008 / authorial collective M. S. Lobasova). – 1 electronic opt. disk (*DVD*). – System requirements: *Intel Pentium* (or an analogical processor of other manufacturers) 1 GHz; 512 Mb of operating memory; 165 Mb of free disk space; *DVD* drive; operating system *Microsoft Windows 2000 SP 4 / XP SP 2 / Vista* (32 bit); *Adobe Reader 7.0* (or an analogical product for reading files of the format *pdf*); *Microsoft PowerPoint 2003* or higher. – (Number of state registration in FGUPT NTZ «Informregistr» 0320902508).

33. Lobasova, M. S. Heat exchange. Bank of test tasks [Electronic resource]: control and measuring materials / M. S. Lobasova, T. A. Milovidova, A. V. Minaev. – Electronic data. (49 Mb). – Krasnoyarsk: IIPK SFU, 2009. – (Heat exchange: UMKD No 1536-2008 / authorial collective M. S. Lobasova). – 1 electronic opt. disk (*DVD*). – System requirements: *Intel Pentium* (or an analogical processor of other manufacturers) 1 GHz; 512 Mb of operating memory; 109 Mb of free disk space; *DVD* drive; operating system *Microsoft Windows 2000 SP 4 / XP SP 2 / Vista* (32 bit); *Adobe Reader 7.0* (or an analogical product for reading files of the format *pdf*). – (Number of state registration in FGUPT NTZ «Informregistr» 0320902510).

34. Unified computer system for knowledge testing with UniTest version 3.0.0: user manual / A. N. Shniperov, B. M. Bidus. – Krasnoyarsk, 2008.

Перечень наглядных и других пособий, методических указаний и материалов к техническим средствам обучения

35. Тепломассообмен. Презентационные материалы [Электронный ресурс] : наглядное пособие / М. С. Лобасова, К. А. Финников, Т. А. Миловидова [и др.]. – Электрон. дан. (6 Мб). – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – (Тепломассообмен : УМКД № 1536-2008 / рук. творч. коллектива М. С. Лобасова). – 1 электрон. опт. диск (*DVD*). – Систем. требования : *Intel Pentium* (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц ; 512 Мб оперативной памяти ; 6 Мб свободного дискового пространства ; привод *DVD* ; операционная система *Microsoft Windows 2000 SP 4 / XP SP 2 / Vista* (32 бит) ; *Microsoft PowerPoint 2003* или выше. – (Номер гос. регистрации в ФГУП НТЦ «Информрегистр» 0320902509).

36. Интерактивные технические средства обучения : практ. руководство / сост. : А. Г. Суковатый, К. Н. Захарьин, А. В. Казанцев, А. В. Сарафанов. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – 84 с.

Методические указания по курсу

37. Теория тепломассообмена : метод. указания к решению задач / сост. : В.С. Славин, М.С. Лобасова. - Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2002. 31 с.

38. Теория теплообмена. Конвективный теплообмен : метод. указания к решению задач / сост. : В. С. Славин, М. С. Лобасова. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2003. – 44 с.

39. Теория тепломассообмена. Массообмен : метод. указания к решению задач / сост. : В. С. Славин, М. С. Лобасова. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2004. – 23 с.

40. Тепломассообмен. Нестационарная теплопроводность : метод. указания к решению задач / сост. : В. С. Славин, М. С. Лобасова. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2005. – 26 с.

41. Тепломассообмен. Теплообмен излучением : метод. указания к решению задач / сост. : В. С. Славин, М. С. Лобасова. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2005. – 30 с.

42. Тепломассообмен : метод. указания к самостоятельной работе / сост. М. С. Лобасова. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2006. – 43 с.

43. Видин, Ю. В. Теоретические основы теплотехники. Тепломассообмен. – 3-е изд. испр. и доп. / Ю. В. Видин, В. В. Колосов. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2005. – 174 с.

44. Щербаков, П. П. Теплообмен, термодинамика, явления переноса: руководство по эксплуатации лабораторных установок и методические указания к выполнению работ / П. П. Щербаков ; Учебно-научный центр «Физтехприбор». – М., 2006.